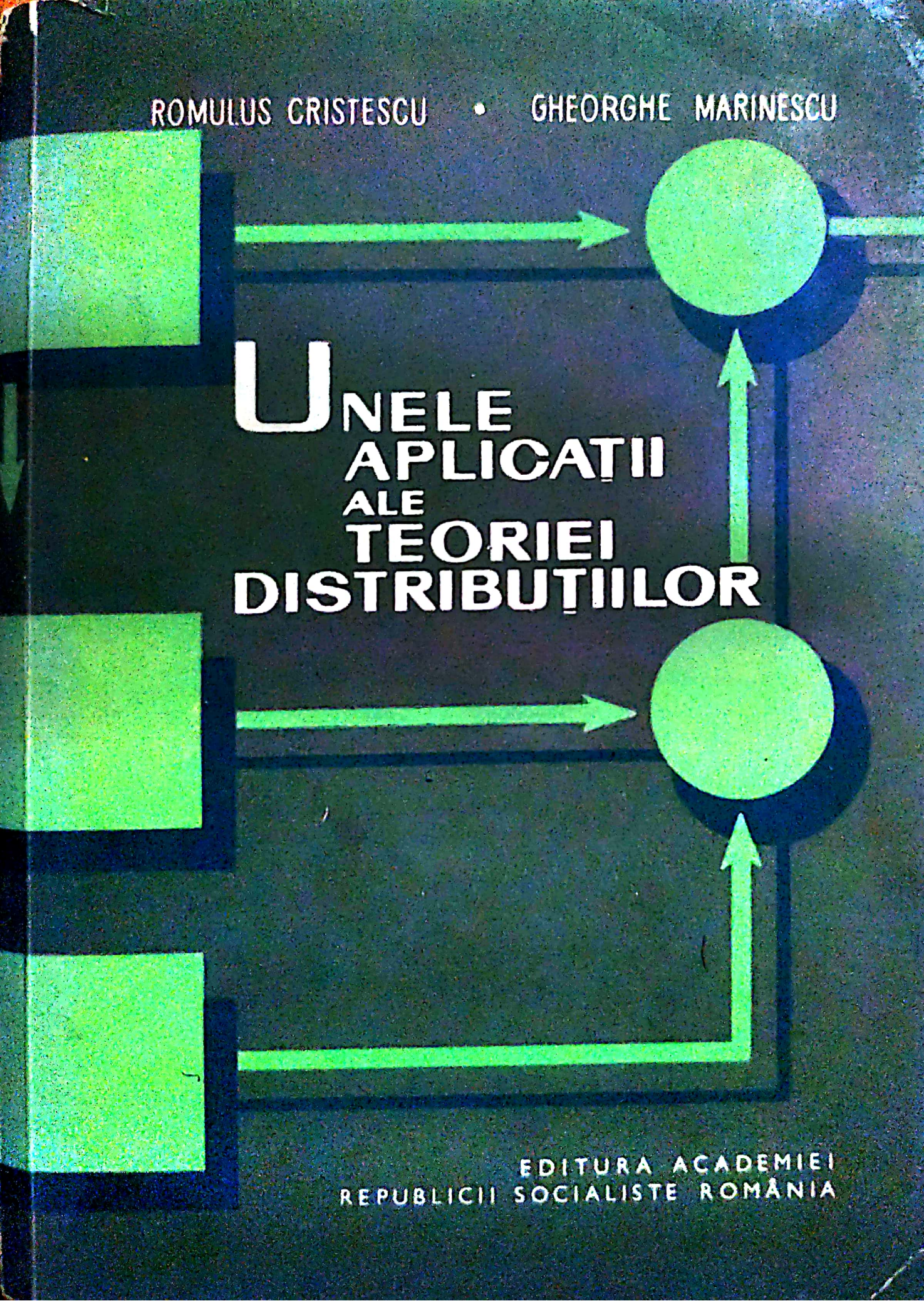
ROMULUS CRISTESCU • GHEORGHE MARINESCU



UNELE APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR

EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ROMULUS CRISTESCU GHEORGHE MARINESCU

UNELE APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
București, 1966

Scanned with OKEN Scanner

Prefață

Cartea de față se adresează în special celor care folosesc metodele matematice în studii sau în aplicații concrete, fie ei matematicieni, fizicieni, tehnicieni etc.

În fizică și în tehnică se folosesc pe scară largă metodele analizei matematice clasice, mai ales prin intermediul ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale. Se folosesc însă și metode mai noi, care nu pot fi cuprinse în analiza clasică și care, de obicei, nu sînt justificate decît prin analogie sau prin rezultatele pe care le dau.

Unele din aceste metode își găsesc justificarea în teoria distribuțiilor, disciplină matematică recentă, creată în bună parte tocmai din necesitatea de a da o bază teoretică riguroasă unor procedee preferate de tehnicieni, însă insuficient fundamentate.

Pe lîngă alți autori, ne-am străduit și noi să prezentăm teoria distribuțiilor într-o formă cît mai simplă, contribuind la rezolvarea unor probleme de fundamentare a acestei teorii și de aplicare a ei în diferite domenii.

Am căutat să expunem mai în amănunt unele aplicații, apropiindu-ne mai mult de probleme pe care le întîlnim în cărțile de specialități înrudite cu matematica. În ceea ce privește bazele teoriei distribuțiilor, nu reluăm decît noțiunile necesare pentru aplicațiile pe care le avem în vedere, situîndu-ne în cadrul cel mai simplu care ne dă posibilitatea unei expuneri logice consistente.

Pentru unele rezultate pe care le folosim fără demonstrație, recomandăm cărțile citate în bibliografie.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

Spaţii vectoriale şi noţiunea de distribuţie

Noţiunea de distribuţie extinde în mod eficient noţiunea de funcţie definită pe spaţiul euclidian finit-dimensional (funcţie de mai multe variabile reale). Pentru aplicaţiile pe care le avem în vedere, este necesar să considerăm funcţii şi deci şi distribuţii, cu valori în spaţii vectoriale.

În primul paragraf al acestui capitol introducem noţiunile necesare pentru înţelegerea definiţiei distribuţiilor vectoriale, definiţie pe care o vom da în paragraful următor. Presupunem cunoscute noţiunile şi notaţiile teoriei mulţimilor.

§ 1. Spaţii vectoriale cu convergenţă

1. Mulţimea E, formată din elemente abstracte, se numeşte *spaţiu vectorial complex*, dacă în E este definită o operaţie de adunare între elemente şi o operaţie de înmulţire cu numerele complexe, satisfăcînd regulile obişnuite de calcul.

Mai precis, aceasta înseamnă că :

I. Fiecărei perechi de elemente x, y din E îi corespunde un element $x + y$, tot din E, astfel încît :

$$\mathrm{I}_1.\ (x + y) + z = x + (y + z)$$

I_2. Există un element $\mathbf{0} \in E$, numit elementul nul (sau zero) al spaţiului, pentru care :

$$\mathbf{0} + x = x + \mathbf{0} = x$$

oricare ar fi elementul $x \in E$.

I_3. Pentru orice element $x \in E$, există un element $(-x) \in E$, astfel încît :

$$I_4.\ x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

II. Pentru orice $x \in E$ şi orice număr complex a există un element $ax \in E$, cu următoarele proprietăţi :

$$II_1.\ a(x + y) = ax + ay$$

$$II_2.\ (a + b)x = ax + bx$$

$$II_3.\ a(bx) = (ab)x$$

$$II_4.\ 1x = x.$$

Elementul $(-1)\,x$ coincide cu $(-x)$ şi se notează cu $-x$; se notează de asemenea :

$$x + (-1)\,y = x + (-y) = x - y.$$

Cu aceste convenţii, calculul decurge la fel ca pentru numerele complexe (se înţelege, numai în privinţa operaţiilor care au fost definite).

Dacă în locul numerelor complexe se consideră numai numere reale, atunci spaţiul E se numeşte *spaţiu vectorial real.*

Noi vom considera însă, în general, spaţii vectoriale complexe şi vom omite ultimul cuvînt, spunînd, simplu, spaţii vectoriale. Vom preciza cînd va fi vorba, în special, de un spaţiu vectorial real.

2. Numim şir cu valori în E (sau şir de elemente din E), orice aplicaţie a mulţimii numerelor naturale N în E. Elementul care corespunde numărului natural n se notează de obicei cu x_n, iar şirul în întregime cu $\{x_n\}_{n \in N}$ sau mai simplu prin $\{x_n\}$. Şirul $\{y_n\}$ (cu valori în E) se numeşte subşir al şirului $\{x_n\}$, dacă pentru orice $n \in N$ există $m \in N$, $m \geqslant n$, astfel încît $y_n = x_m$.

Spunem că *spaţiul vectorial E este un spaţiu cu convergenţă, dacă din mulţimea tuturor şirurilor cu valori în E se distinge o submulţime de şiruri, numite şiruri convergente, cu următoarele proprietăţi :*

III_1. Fiecărui şir convergent $\{x_n\}$ îi corespunde un element x din E şi numai unul singur, numit limita şirului $\{x_n\}$.

Scanned with OKEN Scanner

(În acest caz se mai spune că şirul $\{x_n\}$ converge (sau tinde) către x şi se scrie :

$$x_n \to x$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x).$$

III_2. Dacă $x_n = x$ pentru orice $n \in N$, atunci şirul $\{x_n\}$ converge către x.

III_3. Orice subşir al unui şir convergent către x, converge către x.

III_4. Dacă $x_n \to x$ şi $y_n \to y$, atunci

$$ax_n + by_n \to ax + by,$$

oricare ar fi numerele complexe a şi b.

III_5. Dacă şirul de numere complexe $\{a_n\}$ converge către numărul complex a, atunci

$$a_n x \to ax.$$

Condiţiile III_1, III_2, III_3 se pot pune şi dacă mulţimea E nu este un spaţiu vectorial. Menţionăm că aceste condiţii nu asigură că E este un spaţiu topologic, noţiunea de spaţiu cu convergenţă introdusă ca mai sus fiind mai generală decît aceea de spaţiu vectorial topologic.

3. Aplicaţia T a unui spaţiu vectorial E în alt spaţiu vectorial F se numeşte liniară dacă :

$$T(ax + by) = a\,T(x) + b\,T(y).$$

Se verifică uşor că de aici rezultă $T(0) = 0$.

Pentru aplicaţiile liniare, vom scrie adesea Tx în loc de $T(x)$.

Aplicaţiile unui spaţiu vectorial în corpul numerelor complexe se numesc funcţionale. Pentru valoarea unei funcţionale liniare f în punctul x, întrebuinţăm, în loc de $f(x)$, notaţia specială $< x, f >$.

Fie acum E şi F două spaţii vectoriale cu convergenţă, iar f o aplicaţie a spaţiului E în spaţiul F.

Aplicaţia f se numeşte continuă în punctul $x \in E$, dacă pentru orice şir $\{x_n\}$ care converge către x, şirul $\{f(x_n)\}$ converge către $f(x)$.

Pentru o aplicaţie liniară T, este suficient să considerăm punctul **0** : *dacă T este continuă în acest punct, atunci ea este*

continuă în orice punct $x \in E$. Într-adevăr, fie $\{x_n\}$ un șir convergent către x; atunci șirul $\{x_n - x\}$ converge către 0, datorită proprietăților III_2 și III_4; deci

$$T(x_n - x) \to \mathbf{0},$$

sau, datorită liniarității,

$$Tx_n - Tx \to \mathbf{0},$$

adică

$$Tx_n \to Tx.$$

Deci aplicația liniară T a unui spațiu vectorial cu convergență în alt spațiu de același fel este continuă (în orice punct) dacă și numai dacă pentru orice șir $\{x_n\}$ convergent către $\mathbf{0}$ (în spațiul de definiție), șirul $\{Tx_n\}$ tinde către $\mathbf{0}$.

4. Un prim exemplu de spațiu vectorial (complex) este însuși corpul K al numerelor complexe.

Alt exemplu este dat de produsul cartezian al lui K prin el însuși, de un număr finit de ori, adică mulțimea K^m a sistemelor de numere complexe:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

În mulțimea K^m considerăm operațiile cunoscute din algebra liniară: dacă x este ca mai sus și

$$y = (y_1, y_2, \ldots y_m),$$

atunci:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m)$$

și

$$ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_m).$$

Numărul m este numit dimensiunea (complexă) a spațiului.

Se știe din algebra liniară că orice aplicație liniară A a acestui spațiu în el însuși este echivalentă cu o matrice (a_{ij}): elementele vectorului $y = Ax$ sînt de forma:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Spațiul K^m este de asemenea un spațiu vectorial cu convergență: șirul $\{x_n\}$, unde

$$x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}),$$

Scanned with OKEN Scanner

converge către elementul

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dacă pentru orice $i = 1, \ldots, m$,

$$x_{in} \to x_i.$$

Se verifică uşor că orice aplicaţie liniară a acestui spaţiu în el însuşi este continuă.

Se pot considera, în mod evident, şi aplicaţii liniare ale acestui spaţiu în altul, cu aceeaşi dimensiune sau cu dimensiune diferită.

În general, noi vom presupune cunoscute elementele de algebră liniară de care vom avea nevoie.

Exemple mai generale de spaţii vectoriale cu convergenţă sînt spaţiile de funcţii definite pe o mulţime oarecare Q şi cu valori complexe.

Adunarea şi înmulţirea cu numere complexe se definesc în mod natural, prin componente: dacă x şi y sînt funcţii definite pe mulţimea Q, atunci funcţia $z = x + y$ este dată de formula:

$$z(t) = x(t) + y(t), \quad t \in Q,$$

iar pentru a complex, funcţia $v = ax$ este dată de formula:

$$v(t) = ax(t), \quad t \in Q.$$

În orice spaţiu de funcţii cu valori complexe se poate defini o relaţie de convergenţă, numită convergenţă punctuală, în modul următor: se spune că şirul $\{x_n\}$, unde x_n este funcţia care în punctul t are valoarea $x_n(t)$, converge punctual către x, dacă, pentru orice t din mulţimea de definiţie, $x_n(t) \to x(t)$.

Noi vom considera cazuri particulare de astfel de spaţii, cu relaţii de convergenţă mai restrictive decît cea punctuală.

5. În toate exemplele de mai sus se pot înlocui numerele complexe prin numere reale şi se obţin spaţii vectoriale reale.

Vom presupune cunoscută structura spaţiului euclidian cu m dimensiuni (reale), R^m (produsul cartezian al dreptei reale cu ea însăşi, de m ori).

6. Două spaţii vectoriale E şi E_1 se numesc izomorfe (algebric) dacă între ele există o corespondenţă biunivocă $x \leftrightarrow f(x)$, care păstrează operaţiile algebrice, adică:

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y).$$

Pentru spațiile vectoriale cu convergență, noi vom utiliza noțiunea de izomorfism într-un sens mai restrictiv, cerînd să fie păstrate și relația de convergență sau elementele prin care este definită această relație.

7. O submulțime E_0 a unui spațiu vectorial E se zice că este un *subspațiu vectorial* al lui E, dacă are proprietățile:

(i) dacă $x \in E_0$ și $y \in E_0$, atunci $x + y \in E_0$;

(ii) dacă $x \in E_0$, atunci $\alpha x \in E_0$ oricare ar fi numărul complex α (respectiv: oricare ar fi numărul real α, dacă E este un spațiu vectorial real).

Dacă E_0 este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial E, atunci E_0 este un spațiu vectorial față de operațiile date în E.

Verificarea se face cu ușurință.

Dacă A este o submulțime oarecare a spațiului vectorial E, atunci mulțimea tuturor combinațiilor liniare de elemente din A, adică mulțimea tuturor sumelor finite de forma:

$$\sum_i \alpha_i x_i, \quad (x_i \in A),$$

se numește *subspațiu vectorial generat* de A. Este cel mai mic subspațiu vectorial al lui E, care conține mulțimea A.

Subspațiul vectorial generat de un element $x_0 \in E$ este mulțimea tuturor elementelor de forma αx_0.

§ 2. Spații Banach și spații Hilbert

1. O categorie importantă de spații vectoriale cu convergență o constituie spațiile normate, în care noțiunea de convergență se introduce cu ajutorul unei norme, la fel cum se definește, în cazul numerelor reale, cu ajutorul valorii absolute, sau, în cazul numerelor complexe, cu ajutorul modulului.

Fie E un spațiu vectorial. Vom spune că E este normat dacă fiecărui element $x \in E$ îi corespunde un număr real $\|x\|$, cu următoarele proprietăți:

IV_1. $\|x\| \geqslant 0$ *pentru orice* $x \in E$; $\|x\| = 0$ *dacă și numai dacă* $x = 0$;

IV_2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ $(x \in E, y \in E)$

IV_3. $\|ax\| = |a| \, \|x\|$. (a *complex*, $x \in E$).

Prin definiţie, *şirul* $\{x_n\}$, *cu valori în spaţiul vectorial normat* E, *converge către elementul* $x \in E$, *dacă* :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0. \tag{1}$$

Această relaţie este echivalentă, după cum se ştie, cu următoarea :

Pentru orice număr $\varepsilon > 0$, *există un indice* n_0 *astfel încît pentru orice* $n \geqslant n_0$ *să avem* :

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Se vede imediat că limita astfel definită este unică.

Într-adevăr, dacă presupunem că împreună cu relaţia (1) este valabilă şi relaţia :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x'\| = 0,$$

atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există n_0, astfel încît pentru $n \geqslant n_0$ să avem în acelaşi timp :

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \text{ şi } \|x_n - x'\| < \varepsilon ;$$

de aici deducem :

$$\|x - x'\| = \|x - x_n + x_n - x'\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x_n - x'\| < 2\varepsilon ;$$

cum ε este arbitrar, rezultă $\|x - x'\| = 0$, deci $x = x'$.

În mod analog se verifică toate proprietăţile cerute şirurilor convergente în paragraful precedent (la fel ca în cazul numerelor reale sau complexe).

2. Toate proprietăţile numerelor complexe care se bazează numai pe condiţiile IV_1, IV_2 şi IV_3 se păstrează, evident, şi pentru elementele unui spaţiu vectorial normal. O proprietate importantă, care nu intră în această categorie, este criteriul de convergenţă al lui Cauchy.

Şirul $\{x_n\}$ *cu valori în spaţiul vectorial normat* E *se numeşte un şir Cauchy, dacă* :

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se vede uşor că orice şir convergent către un element din E este un şir Cauchy. Proprietatea inversă, adevărată în cazul numerelor reale sau complexe, se numeşte criteriul lui Cauchy.

În spaţiile vectoriale normate, acest criteriu nu este întotdeauna valabil.

Dacă în spaţiul vectorial normat E, orice şir Cauchy converge către un element din E, atunci se spune că E este complet. Spaţiile vectoriale normate complete se mai numesc şi spaţii Banach.

3. Spaţiul K^m al sistemelor de numere complexe de forma :

$$x = (x_1, \ldots, x_m)$$

se poate norma într-o infinitate de feluri care dau aceeaşi relaţie de convergenţă pe care am introdus-o în paragraful precedent.

Noi vom considera expresiile :

$$\|x\|^{(0)} = \max (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|)$$

$$\|x\|^{(p)} = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Se demonstrează (vezi G. Marinescu [18], p. 34—36, sau [19], p. 106—108) că aceste expresii satisfac condiţiile IV_1, IV_2 şi IV_3 şi inegalităţile :

$$\|x\|^{(0)} \leqslant \|x\|^{(p)} \qquad , p \geqslant 1$$

$$\|x\|^{(p')} \leqslant \|x\|^{(p)}, p' > p \geqslant 1$$

$$\|x\|^{(p)} \leqslant n^{1/p} \|x\|^{(0)} \ , p \geqslant 1.$$

Echivalenţa relaţiei de convergenţă :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^{(0)} = \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_{in} - x_i| = 0,$$

cu cea dată prin componente :

$$\lim_{n\to\infty} |x_{in} - x_i| = 0, \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

este evidentă, iar echivalenţa relaţiilor de convergenţă date de normele $\|x\|^{(p)}$ cu cea dată de $\|x\|^{(0)}$ rezultă imediat din inegalităţile de mai sus.

Este evident că în K^m este valabil criteriul lui Cauchy, deci K^m este un spaţiu Banach.

Scanned with OKEN Scanner

4. Alt exemplu uzual de spaţiu Banach este spaţiul C al funcţiilor continue, cu valori complexe, definite pe un segment $[a, b]$. Se verifică uşor că expresia

$$\| x \| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

este o normă pentru acest spaţiu. Convergenţa în această normă este, evident, echivalentă cu convergenţa uniformă pe segmentul $[a, b]$.

Dintr-o teoremă a lui Weierstrass rezultă imediat că spaţiul C este complet. Într-adevăr, fie $\{x_n\}$ un şir Cauchy cu valori în C. Prin definiţie :

$$\lim_{n,m \to \infty} \| x_n - x_m \| = 0$$

sau

$$\lim_{n,m \to \infty} \max |x_n(t) - x_m(t)| = 0,$$

deci, pentru orice $t \in [a, b]$,

$$\lim_{n,m \to \infty} |x_n(t) - x_m(t)| = 0,$$

ceea ce înseamnă că şirul de numere $\{x_n(t)\}$ este un şir Cauchy. Potrivit criteriului lui Cauchy, pentru orice $t \in [a, b]$, şirul $\{x_n(t)\}$ converge către un număr $x(t)$. Teorema lui Weierstrass afirmă că funcţia $t \to x(t)$ este continuă.

Să arătăm că şirul $\{x_n\}$ converge în normă către x. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există N_ε astfel încît pentru $n \geqslant N_\varepsilon$, $m \geqslant N_\varepsilon$,

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon,$$

oricare ar fi $t \in [a, b]$. Trecînd la limită cu $m \to \infty$, obţinem :

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon,$$

de unde rezultă că şirul $\{x_n(t)\}$ converge uniform către $x(t)$.

5. Un exemplu de spaţiu vectorial normat în care nu este valabil criteriul lui Cauchy, este dat de mulţimea P a funcţiilor de forma $P(t) + i\,Q(t)$, unde P şi Q sînt polinoame reale. Restricţiile acestor funcţii la segmentul $[a, b]$ sînt conţinute în spaţiul C. Dintr-o altă teoremă a lui Weierstrass rezultă că orice element din C este limita în normă a unui şir de asemenea funcţii. Dacă

x este o funcție din C, care nu aparține mulțimii P și $\{x_n\}$ un șir de elemente din P care converge către x, atunci $\{x_n\}$ este un șir Cauchy în C, deci și în P, considerat ca subspațiu vectorial normat al lui C. Însă șirul $\{x_n\}$ nu poate să conveargă către un element y din P, pentru că atunci x ar fi egal cu y, deci ar aparține mulțimii P. Am arătat astfel că spațiul P nu este complet.

6. Următoarea teoremă, pe care o dăm fără demonstrație, are un rol important în analiza funcțională.

TEOREMA 1. *Pentru orice spațiu vectorial normat E, există un spațiu Banach $\overline{E}$, astfel încît E este izomorf (algebric și cu păstrarea normei) cu un subspațiu vectorial E_1 al lui $\overline{E}$ și orice element al lui $\overline{E}$ este limita unui șir de elemente din E_1.*

Pentru demonstrația acestei teoreme se poate vedea, de exemplu, G. Marinescu [19] sau R. Cristescu [8].

Spațiul E este confundat de obicei cu E_1, iar $\overline{E}$ este numit completatul lui E.

7. Printre spațiile Banach distingem spațiile Hilbert în care norma este definită cu ajutorul unui produs scalar.

Fie E un spațiu vectorial. Spunem că pe E s-a definit un produs scalar dacă oricărei perechi de elemente x și y din E îi corespunde un număr complex $(x|y)$ cu următoarele proprietăți *) :

$$V_1.\ (ax_1 + bx_2|y) = a(x_1|y) + b(x_2|y)$$

$$V_2.\ (x|y) = \overline{(y|x)}$$

$$V_3.\ (x|x) > 0 \text{ pentru orice } x \neq \mathbf{0}.$$

În aceste condiții, expresia :

$$\|x\| = (x|x)^{1/2}$$

definește o normă pe E. Să verificăm proprietățile IV_1—IV_3 :

Din V_2 rezultă $(x|x) \geqslant 0$, deci $\|x\|$ este definită și $\geqslant 0$. Din V_3 rezultă că $\|x\| = 0$ numai pentru $x = 0$.

Dacă a este număr complex,

$$\|ax\| = (ax \mid ax)^{1/2} = (a\bar{a})^{1/2}\,(x \mid x)^{1/2} = |\,a\,|\,\|x\|.$$

---

*) Dacă a este un număr complex, conjugatul lui a se va nota prin $\bar{a}$.

Pentru inegalitatea :

$$\| x + y \| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

să demonstrăm mai întîi inegalitatea

$$|(x \mid y)| \leqslant \| x \| \, \|y\|.$$

Fie $x \in E$ și $y \in E$ două elemente date și fie θ un număr real astfel încît :

$$e^{i\theta}(x \mid y) = (e^{i\theta} x \mid y) = |(x \mid y)|.$$

Atunci

$$0 \leqslant \| e^{i\theta} x - y \|^2 = (e^{i\theta} x - y \mid e^{i\theta} x - y) =$$

$$= (e^{i\theta} x \mid e^{i\theta} x) + (y \mid y) - (y \mid e^{i\theta} x) - (e^{i\theta} x \mid y) =$$

$$= \| e^{i\theta} x\|^2 + \| y \|^2 - e^{-i\theta}(y \mid x) - e^{i\theta}(x \mid y) =$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,|(x \mid y)|$$

de unde

$$|(x \mid y)| \leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Dacă presupunem $\|x\| \neq 0$ și $\|y\| \neq 0$, putem aplica ultima inegalitate elementelor $\frac{1}{\|x\|} x$ și $\frac{1}{\|y\|} y$ și obținem

$$\left| \left(\frac{x}{\|x\|} \middle| \frac{y}{\|y\|} \right) \right| \leqslant 1,$$

deci :

$$|(x \mid y)| \leqslant \| x \| \| y \|.$$

Dacă $\| x\| = 0$ sau $\| y \| = 0$, atunci și $(x|y) = 0$, deci ultima inegalitate se verifică și în acest caz.

Inegalitatea triunghiului :

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$$

rezultă atunci din :

$$\| x + y \|^2 = (x + y | x + y) = (x \mid x) + (y \mid y) + (x \mid y) +$$

$$+ (y \mid x) = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \operatorname{Re}(x|y) \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 +$$

$$+ 2\,|(x|y)| \leqslant \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \|x\| \|y\| = (\| x \| + \| y \|)^2.$$

Un spațiu vectorial normat, în care norma este dată cu ajutorul unui produs scalar, prin expresia de mai sus, se numește spațiu prehilbertian. Spațiile prehilbertiene complete se numesc spații Hilbert sau hilbertiene.

Se poate vedea ușor că spațiul obținut prin completarea unui spațiu prehilbertian, conform teoremei 1, este un spațiu Hilbert.

8. Funcționalele care satisfac numai condițiile V_1 și V_2 se numesc hermitiene.

Dacă o funcțională f definită pe $E \times E$ satisface condiția $f(x,x) \geqslant 0$, mai slabă decît V_3, se spune că f este de tip pozitiv sau pozitiv definită. Dacă $f(x, x) > 0$ pentru orice $x \neq 0$, atunci vom spune că f este strict pozitiv definită sau de tip strict pozitiv. Un produs scalar este deci o funcțională hermitiană strict pozitiv definită.

Dintr-un spațiu vectorial pe care este definită o funcțională hermitiană pozitiv definită f, putem forma un spațiu prehilbertian considerînd egale oricare două elemente x, y pentru care $f(x - y,\ x - y) = 0$.

9. Două elemente x, y ale unui spațiu Hilbert E se zic ortogonale și se notează $x \perp y$, dacă $(x|y) = 0$. Două submulțimi A, B ale lui E se zic ortogonale și se notează $A \perp B$ dacă oricare ar fi $x \in A$ și $y \in B$ avem $x \perp y$.

Enunțăm fără demonstrație următoarea teoremă care joacă un rol important în teoria spațiilor Hilbert.

TEOREMA 2. *Dacă E_0 este un subspațiu vectorial închis *) al unui spațiu Hilbert E, atunci orice element $x \in E$ se reprezintă în mod unic sub forma $x = u + v$, unde $u \in E_0$ iar $v \perp E_0$.*

Pentru demonstrația acestei teoreme se poate vedea, de exemplu, R. Cristescu [7].

Menționăm numai că elementul u satisface condiția:

$$\| u - x \| = \inf_{v \in E_0} \| y - x \|.$$

Elementul u din teorema 2 se numește proiecția elementului x pe subspațiul E. Vom scrie:

$$u = [E_0]x.$$

---

*) Adică E_0 este un subspațiu vectorial și în același timp o mulțime închisă: dacă $x_n \to x$ și $x_n \in E_0$ pentru orice n, atunci $x \in E_0$.

Dacă notăm :

$$E_0^{\perp} = \{y \,|\, y^{\perp} E_0\},$$

atunci şi $E_0^{\perp}$ este un subspaţiu vectorial închis numit complementul ortogonal al lui E_0 şi avem :

$$v = [E_0^{\perp}]x.$$

Se observă imediat că egalitatea $[E_0]\, x = x$ este echivalentă cu relaţia $x \in E_0$, iar egalitatea $[E_0]\, x = \mathbf{0}$, cu relaţia $x \in E_0^{\perp}$.

10. Pentru funcţiile de variabilă reală sau complexă şi cu valori într-un spaţiu vectorial normat E, noţiunile limită, continuitate şi derivată se definesc la fel ca în cazul funcţiilor cu valori reale sau complexe, folosind norma în locul modulului.

Fie $x(t)$ o funcţie de variabilă reală şi cu valori în spaţiul vectorial normat E. Limita x_0 a acestei funcţii în punctul t_0 se defineşte prin relaţia

$$\lim_{t \to t_0} \|x(t) - x_0\| = 0 \tag{3}$$

(evident, dacă există un element $x_0 \in E$, care să verifice această relaţie ; se vede uşor că dacă există un asemenea element, el este unic). De obicei se scrie în locul relaţiei (3) :

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0.$$

Funcţia $x(t)$ se numeşte continuă în punctul t_0 dacă :

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x(t_0).$$

Derivata funcţiei $x(t)$ în punctul t_0 este definită prin relaţia obişnuită :

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} [x(t) - x(t_0)]$$

şi are proprietăţi ce se pot stabili exact la fel ca în cazul funcţiilor cu valori scalare. De exemplu : dacă $\alpha(t)$ este o funcţie cu valori scalare şi $x(t)$ o funcţie cu valori în E, atunci :

$$[\alpha(t)x(t)]' = \alpha'(t)\, x(t) + \alpha(t)\, x'(t).$$

Lucrurile se petrec la fel dacă în locul variabilei reale t se consideră o variabilă complexă.

Scanned with OKEN Scanner

Teoria integrării funcțiilor cu valori vectoriale are diverse aspecte, dintre care noi alegem definiția integralei Riemann-Stieltjes, dată în cartea *Spații vectoriale normate* (v. G. Marinescu [18]).

Fie $[a, b]$ un segment al dreptei reale și $\varphi(t)$ o funcție cu valori scalare, definită pe acest segment. Numim diviziune a segmentului $[a, b]$ orice mulțime finită de puncte:

$$\delta = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n\} \subset [a, b]$$

așa ca:

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b.$$

Fie Δ mulțimea tuturor acestor diviziuni.

Funcția φ este numită cu variația mărginită dacă:

$$\sup_{\delta \in \Delta} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(\tau_k) - \varphi(\tau_{k-1})| < +\infty.$$

Fie acum $x(t)$ o funcție continuă, definită pe $[a, b]$ și cu valori în spațiul Banach E. Dacă funcția φ are variația mărginită, vom defini integrala funcției x în raport cu φ pe segmentul $[a, b]$ și vom nota cu:

$$\int_a^b x(t)\, \mathrm{d}\varphi(t)$$

elementul $I \in E$, care are următoarea proprietate: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon)$, astfel încît:

$$\left\| I - \sum_{k=1}^{n} [\varphi(\tau_k) - \varphi(\tau_{k-1})]\, x(t_k) \right\| < \varepsilon$$

oricare ar fi diviziunea $\delta = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n\} \in \Delta$, supusă la condiția:

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\tau_k - \tau_{k-1}| < \eta,$$

și oricare ar fi punctul $t_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$.

În cartea *Spații vectoriale normate* se demonstrează existența și unicitatea integralei în condițiile date mai sus. De asemenea se demonstrează următoarele proprietăți:

Scanned with OKEN Scanner

a) Dacă T este o aplicaţie liniară şi continuă a spaţiului Banach E în spaţiul Banach E', atunci :

$$\int_a^b T(x(t))\,\mathrm{d}\varphi(t) = T\left(\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\varphi(t)\right).$$

În particular, dacă f este o funcţională liniară şi continuă definită pe E, atunci :

$$<\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\varphi(t),\ f> = \int_a^b < x(t),\ f>\,\mathrm{d}\varphi(t).$$

b) Dacă $x(t)$ şi $y(t)$ sînt funcţii continue definite pe $[a, b]$ şi cu valori în E iar α, β sînt scalari, atunci :

$$\int_a^b [\alpha x(t) + \beta x(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t) = \alpha\int_a^b x(t)\mathrm{d}\varphi(t) + \beta\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}\varphi(t).$$

c) Dacă φ şi ψ sînt funcţii cu variaţia mărginită iar α, β scalari, atunci :

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}[\alpha\varphi(t) + \beta\psi(t)] = \alpha\int_a^b x(t)\mathrm{d}\varphi(t) + \beta\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\psi(t).$$

d) Dacă $a < c < b$, atunci :

$$\int_a^c x(t)\,\mathrm{d}\varphi(t) + \int_c^b x(t)\,\mathrm{d}\varphi(t) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\varphi(t).$$

e) Avem

$$\left\| \int_a^b x(t)\mathrm{d}\varphi(t) \right\| \leqslant M(x;\ [a, b])\ V(\varphi),$$

unde

$$M(x;\ [a,\ b] = \sup_{t\in[a,\,b]} \|x(t)\|$$

şi

$$V(\varphi) = \sup_{\delta\in\Delta} \sum_{k=1}^{n} |\ \varphi(\tau_k) - \varphi(\tau_{k-1})|\,.$$

În cazul particular $\varphi(t) \equiv 1$, integrala de mai sus se notează :

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$$

și este numită de obicei integrală Bochner (ea corespunde integralei Riemann pentru funcțiile cu valori scalare).

În legătură cu acest caz sînt valabile următoarele proprietăți:

f) Dacă funcția φ are derivată φ' continuă pe $[a, b]$, atunci:

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\varphi(t) = \int_a^b \varphi'(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t.$$

g) Dacă funcțiile φ și x au derivate continue pe $[a, b]$, atunci:

$$\int_a^b \varphi'(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(t)\,x(t)\Big|_a^b - \int_a^b \varphi(t)\,x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fel ca în cazul funcțiilor cu valori scalare, se pot defini și integrale cu limite infinite. De exemplu vom lua ca definiție următoarea formulă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t.$$

Se verifică ușor că existența integralei:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|\,\mathrm{d}t$$

implică existența integralei:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}t$$

și că are loc inegalitatea:

$$\left\|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

§ 3. Spații hilbertiene de funcții. Integrale hilbertiene

1. Presupunem cunoscută teoria măsurii și a integralelor funcțiilor cu valori complexe în raport cu măsuri scalare.

Vom da însă unele definiții, mai ales pentru precizarea terminologiei și notațiilor. Observăm că în cazurile concrete

pe care le vom întîlni, măsura care intervine este măsura Lebesgue pe dreaptă sau în spațiul cu n dimensiuni, iar integrala se obține prin prelungirea integralei Riemann, cu proprietăți binecunoscute.

DEFINIȚIA 1. *Numim spațiu cu măsură un sistem* $(Q, \mathcal{B}, \mu)$ în care :

a) Q *este o mulțime abstractă* ;

b) $\mathcal{B}$ *este o familie de părți ale mulțimii* Q, avînd următoarele proprietăți :

b_1) *Mulțimea* Q *aparține familiei* $\mathcal{B}$.

b_2) *Dacă* $A \in \mathcal{B}$, *atunci și* $\mathbf{C}A \in \mathcal{B}$.

b_3) *Dacă* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *aparțin familiei* $\mathcal{B}$, *atunci și reuniunea lor,* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, *aparține familiei* $\mathcal{B}$.

c) μ *este o aplicație a lui* $\mathcal{B}$ *în mulțimea numerelor reale, pozitive sau nule, completată cu* $+\infty$ *și satisface condițiile* :

c_1) $\mu(\emptyset) = 0$, *unde* $\emptyset$ *este mulțimea vidă*

c_2) *Dacă* $A_n \in \mathcal{B}$ *pentru* $n = 1, 2, \ldots$ *și* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pentru* $i \neq j$, atunci :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

2. Fie f o aplicație a mulțimii Q în corpul numerelor complexe. Presupunem că se cunoaște definiția integralei :

$$\int_Q f(q)\, d\mu(q)$$

(cînd această integrală are sens).

DEFINIȚIA 2. *Aplicațiile* f *ale mulțimii* Q *în corpul numerelor complexe,* pentru care :

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_Q |f(q)|^2\, d\mu(q) < +\infty$$

se numesc funcții de pătrat sumabil.

Mulțimea funcțiilor de pătrat sumabil este un spațiu vectorial. Dacă se consideră spațiul-cît al acestui spațiu în raport cu relația de echivalență $\|f - g\|_{L^2} = 0$, se obține un spațiu

hilbertian, pe care îl notăm cu $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ și în care produsul scalar este dat de expresia :

$$(f|g) = \int_Q f(q)\,\overline{g(q)}\,d\mu(q).$$

De obicei se spune că elementele spațiului $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ sînt funcțiile de pătrat sumabil, confundîndu-se funcția cu clasa din care face parte. În acest sens putem spune că, în particular, spațiul $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ conține funcțiile χ_B, unde $B \in \mathcal{B}$ și

$$\chi_B(q) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } q \in B \\ 0 \quad ,, \quad q \in \complement B. \end{cases}$$

Prin definiție :

(1) $$\int_Q \chi_B(q)\,d\mu(q) = \mu(B);$$

(2) $$(\chi_{B_1}|\chi_{B_2}) = \int_Q \chi_{B_1}(q)\,\chi_{B_2}(q)\,d\mu(q) = \mu(B_1 \cap B_2).$$

Se știe că spațiul $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ este generat de elementele χ_B, adică orice element din $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ este limită de combinații liniare de elemente de forma χ_B.

3. Fie acum H un spațiu hilbertian oarecare și Z o aplicație a familiei $\mathcal{B}$ în H, cu următoarea proprietate :

(3) $$(Z(B_1)|Z(B_2)) = \mu(B_1 \cap B_2).$$

Elementele de forma $Z(B)$ cu $B \in \mathcal{B}$ generează în H un subspațiu hilbertian, pe care îl vom nota cu $L^2(Z)$.

PROPOZIȚIA 1. *Spațiile $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ și $L^2(Z)$ sînt în corespondență biunivocă și cu păstrarea produsului scalar printr-o aplicație I, determinată de relația $I(\chi_B) = Z(B)$, pentru $B \in \mathcal{B}$.*

Demonstrație. Pe mulțimea combinațiilor liniare de funcții de forma χ_B, aplicația I se definește prin liniaritate

$$I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\,\chi_{B_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,Z(B_i).$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicaţia astfel definită este, evident, liniară şi păstrează produsul scalar :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i Z(B_i) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} \bar{a}'_j Z(B'_j)\right) = \sum_{i,j} a_i \bar{a}_j \left(Z(B_i) \,\middle|\, Z(B'_j)\right) =$$

$$= \sum_{i,j} a_i \overline{a'_j}\, \mu(B_i \cap B'_j) = \sum_{i,j} a_i \bar{a}'_j \left(\chi_{B_i} \,\middle|\, \chi_{B'_j}\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} a'_j \chi_{B'_j}\right).$$

De aici rezultă că aplicaţia I este biunivocă. Este suficient să arătăm că dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \neq 0$, atunci şi $I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right) \neq 0$ (în sensul spaţiilor $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ şi H, respectiv). Într-adevăr, dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \neq 0$ în sensul spaţiului $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$, atunci $\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \right\| \neq 0$. Însă :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \right) =$$

$$= \left(I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right) \,\middle|\, I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{Bi}\right)\right) = \left\| I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right) \right\|^2$$

de unde rezultă că şi $I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right) \neq 0$.

Tot din egalitatea produselor scalare rezultă că imaginile şirurilor Cauchy sînt şiruri Cauchy şi dacă un şir de combinaţii liniare de forma $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}$ converge către un element din $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$, atunci imaginile $I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right)$ converg către un element din $L^2(Z)$.

Aplicaţia astfel definită este, evident, liniară şi păstrează produsul scalar :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i Z(B_i) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} \bar{a}'_j Z(B'_j)\right) = \sum_{i,j} a_i \bar{a}_j \left(Z(B_i) \,\middle|\, Z(B'_j)\right) =$$

$$= \sum_{i,j} a_i \bar{a}'_j \mu(B_i \cap B'_j) = \sum_{i,j} a_i \bar{a}'_j \left(\chi_{B_i} \,\middle|\, \chi_{B'_j}\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} a'_j \chi_{B'_j}\right).$$

De aici rezultă că aplicaţia I este biunivocă. Este suficient să arătăm că dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \neq 0$, atunci şi $I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right) \neq 0$ (în sensul spaţiilor $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ şi H, respectiv). Într-adevăr, dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \neq 0$ în sensul spaţiului $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$, atunci $\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \right\| \neq 0$. Însă :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right) =$$

$$= \left(I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right) \,\middle|\, I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{Bi}\right)\right) = \left\| I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right) \right\|^2$$

de unde rezultă că şi $I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right) \neq 0$.

Tot din egalitatea produselor scalare rezultă că imaginile şirurilor Cauchy sînt şiruri Cauchy şi dacă un şir de combinaţii liniare de forma $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}$ converge către un element din $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$, atunci imaginile $I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right)$ converg către un element din $L^2(Z)$.

Fie acum f un element oarecare din $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$.

Aşa cum am observat mai sus, f este limita unui şir de combinaţii liniare de forma $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}$. Pentru $I(f)$ vom lua limita combinaţiilor liniare corespunzătoare

$$I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i Z(B_i).$$

Produsele scalare se păstrează în mod evident şi prin aceste treceri la limită şi astfel propoziţia este demonstrată.

4. Propoziţia 1 ne dă posibilitatea să definim integrale cu valori în H pentru elementele din $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$.

DEFINIŢIA 3. *Aplicaţiile Z ale familiei $\mathcal{B}$ în H le vom numi măsuri cu valori în H. Dacă Z este o astfel de măsură şi f un element din $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$, spunem că $I(f)$ este integrala funcţiei f în raport cu măsura Z:*

$$\int_Q f dZ = I(f).$$

§ 4. Distribuţii vectoriale şi distribuţii numerice

1. Fie R^m spaţiul euclidian cu m dimensiuni reale. Vom nota cu $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ punctele acestui spaţiu şi cu:

$$|t| = (t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2)^{1/2},$$

norma euclidiană.

Vom însemna cu $\mathcal{D}(R^m)$ mulţimea tuturor funcţiilor φ, definite pe R^m şi cu valori complexe (funcţii complexe de m variabile reale), care au următoarele proprietăţi:

1) φ este indefinit derivabilă, adică există toate derivatele de forma:

$$\frac{\partial^{k_1 + k_2 + \cdots + k_m} \varphi}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \ldots \partial t_m^{k_m}}$$

cu $0 \leqslant k_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Există un număr $r > 0$, care depinde de φ, astfel încît :

$$\varphi(t) = 0 \text{ pentru } |t| \geqslant r.$$

Exemple de funcţii care aparţin mulţimii $\mathcal{D}(R^m)$ sînt date, pentru orice număr $a > 0$, de formula următoare :

$$(1) \qquad \varrho_a(t) = \begin{cases} \exp \dfrac{-a^2}{a^2 - |t|^2} & \text{pentru } |t| < a, \\ 0 \qquad\qquad\quad ,, \qquad |t| \geqslant a. \end{cases}$$

Mulţimea $\mathcal{D}(R^m)$ este, evident, un spaţiu vectorial cu operaţiile obişnuite de adunare între funcţii şi înmulţire cu numerele complexe.

Elementul nul al acestui spaţiu este funcţia identic nulă.

Numărul m, dimensiunea spaţiului pe care sînt definite funcţiile φ, este fix în consideraţiile noastre, însă poate fi orice număr natural (1, 2, . . .). În cele ce urmează vom omite să mai specificăm spaţiul R^m şi vom scrie numai $\mathcal{D}$ în loc de $\mathcal{D}(R^m)$.

Vom introduce în $\mathcal{D}$ o relaţie de convergenţă : spunem că şirul $\{\varphi_n\}$ de elemente din $\mathcal{D}$, converge către elementul $\varphi \in \mathcal{D}$, dacă toate funcţiile φ_n se anulează în afara unei sfere (deci $\varphi_n(t) = 0$ pentru $|t| \geqslant r$ cu $r > 0$ independent de n) şi dacă toate derivatele funcţiilor φ_n converg uniform pe R^m către derivatele respective ale funcţiei φ.

Se înţelege că uniformitatea nu se referă şi la indicele de derivare.

Se verifică uşor că definiţia noastră satisface condiţiilor III din paragraful precedent.

2. Fie acum E un spaţiu vctorial cu convergenţă.

DEFINIŢIE. *Numim distribuţie în m dimensiuni cu valori în E, orice aplicaţie liniară şi continuă a spaţiului $\mathcal{D}$ în E.*

Atunci cînd consideraţiile noastre sînt independente de numărul m, nu-l vom mai preciza, ci vom vorbi, pur şi simplu, de distribuţie.

Menţionăm cazul particular cînd spaţiul E este însuşi corpul K al numerelor complexe. *Distribuţiile cu valori în K, adică funcţionalele liniare şi continue definite pe $\mathcal{D}$, le vom numi distribuţii numerice sau scalare.*

Dacă f este o distribuţie numerică iar $\varphi \in \mathcal{D}$, vom nota $\langle \varphi, f \rangle$ în loc de $f(\varphi)$.

Conjugata $\bar{f}$ a distribuției f se introduce prin formula:

$$<\varphi, \bar{f}> = \overline{<\bar{\varphi}, f>}.$$

Rostul introducerii distribuțiilor este lărgirea noțiunii de funcție, astfel încît să se poată efectua operații care în analiza clasică nu sînt valabile decît pentru clase restrictive de funcții.

Să considerăm cazul funcțiilor, definite pe R și cu valori complexe (funcții complexe de o variabilă reală). Dacă o astfel de funcție f este integrabilă pe orice interval finit, atunci formula:

$$<\varphi, f> = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \overline{f(t)}\, dt \tag{2}$$

definește o distribuție numerică, de o variabilă.

Într-adevăr, integrala din formula (2) are sens evident, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ și este liniară în φ. De altă parte, dacă funcțiile φ_n se anulează în afara unui interval finit și converg către 0 uniform pe toată dreapta reală (deci cu atît mai mult dacă converg către 0 în sensul spațiului $\mathcal{D}$), atunci integralele:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\overline{f(t)}dt \tag{3}$$

converg către 0. Aceasta ne arată că funcționala liniară f, definită de formula (2), este continuă și deci satisface tuturor condițiilor din definiția distribuțiilor.

Aceste considerații se pot extinde și pentru funcții cu valori în spații vectoriale, în special în spațiile Banach.

3. Observăm că distribuțiile definite de funcții local-integrabile prin formula (2), nu determină în mod univoc funcțiile prin care sînt definite. Într-adevăr, în formula (2) putem modifica funcția $f(t)$ pe o mulțime de măsură nulă pe orice segment finit, fără ca valorile integralelor (2) să se schimbe.

Se demonstrează următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA 1. *Pentru ca distribuțiile:*

$$f_1\,\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \overline{f_1(t)}\, dt$$

$$f_2\,\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \overline{f_2(t)}\, dt$$

Scanned with OKEN Scanner

să fie egale este necesar și suficient ca funcțiile $f_1(t)$ *și* $f_2(t)$ *să fie egale aproape peste tot pe orice segment finit.*

Dacă funcția $f(t)$ este continuă, atunci ea este univoc determinată de distribuția f (în clasa funcțiilor continue).

Pentru o distribuție oarecare T, valoarea lui T într-un punct t_0 nu are în general sens. Totuși uneori este comod a se utiliza notația $T(t)$ sau $f(t)$. De exemplu dacă $\varphi \in \mathcal{D}$, atunci prin $<\varphi(t+\xi), f(t)>$ se înțelege valoarea distribuției f calculată pentru $\varphi(t+\xi)$ considerată ca funcție de t.

4. Un caz particular important de distribuție care se obține cu ajutorul formulei (2) este așa-numita *distribuție a lui Heaviside.* Pentru aceasta se consideră funcția lui Heaviside:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } -\infty < t < 0, \\ 1 \quad \text{,,} \quad\quad 1 < t < +\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Această funcție definește o distribuție prin formula:

$$<\varphi, \theta> = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\theta(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \varphi(t)\,dt. \tag{5}$$

Funcția lui Heaviside este întrebuințată în electrotehnică sub numele de ,,eșalon unitate''.

5. O distribuție des utilizată dar care nu se obține prin formula (3) este *distribuția lui Dirac* δ_a definită prin formula:

$$<\varphi, \delta_a> = \varphi(a), \qquad (a \in R). \tag{6}$$

În cazul cînd $a = 0$, vom scrie, mai simplu, δ în loc de δ_0. Deci:

$$<\varphi, \delta> = \varphi(0). \tag{7}$$

Distribuția lui Dirac este numită în electrotehnică ,,impuls unitate''.

În capitolul următor vom vedea legătura dintre distribuția lui Heaviside și distribuția lui Dirac.

6. Vom introduce acum o altă distribuție care nu se obține prin formula (3) și care este în particular utilizată în Mecanica cuantică.

Să considerăm funcția $f(t) = \frac{1}{t}$. Ea nu este integrabilă

în nici o vecinătate a originii. Să considerăm funcționala F definită prin integrala în valoare principală în sensul lui Cauchy:

$$<\varphi, F> = \operatorname{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt.$$

Este evident că F este o funcțională liniară. Să arătăm că este și continuă. Fie deci $\varphi_n \to 0$ în spațiul $\mathcal{D}$ și fie $[-\alpha, \alpha]$ un interval care conține suporturile tuturor fucțiilor φ_n.

Avem:

$$<\varphi_n, F> = \operatorname{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_n(t)}{t}\,dt = \varphi_n(o)\operatorname{vp}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dt}{t} +$$

$$+ \operatorname{vp}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varphi_n(t) - \varphi_n(0)}{t}\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varphi_n(t) - \varphi_n(0)}{t}\,dt$$

ținînd seamă că:

$$\operatorname{vp}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dt}{t} = 0$$

și că funcția $\dfrac{\varphi_n(t) - \varphi_n(0)}{t}$ este integrabilă.

Cu formula creșterilor finite avem:

$$\left|\frac{\varphi_n(t) - \varphi_n(0)}{t}\right| \leqslant \max_{-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha} |\varphi_n'(t)|$$

și deci:

$$|<\varphi_n, F>| \leqslant 2\alpha \max_{-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha} |\varphi'_n(t)|$$

de unde rezultă $<\varphi_n, F> \to 0$.

Distribuția F se notează cu $\operatorname{vp}\dfrac{1}{t}$ (iar uneori simplu $\dfrac{1}{t}$).

Deci:

$$<\varphi, \operatorname{vp}\frac{1}{t}> = \operatorname{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se introduce de asemenea distribuţia $\ln|t|$ prin formula :

$$<\varphi, \ln|t|> = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \ln|t|\, dt.$$

7. Vom considera acum distribuţii cu valori în spaţiul Banach E.

Un exemplu imediat de astfel de distribuţie se obţine prin formula :

$$T\varphi = <\varphi, f> x, \tag{8}$$

unde f este o distribuţie obişnuită, iar x un element din spaţiul E.

Vom nota cu $\mathcal{D}'_E$ mulţimea distribuţiilor cu valori în E. Această mulţime este evident un spaţiu vectorial, cu operaţiile :

$$(T_1 + T_2)\,\varphi = T_1\varphi + T_2\varphi,$$

$$(aT)\,\varphi = \bar{a}\,T\varphi.$$

Putem introduce şi o relaţie de convergenţă pentru şiruri : vom spune că şirul $\{T_n\}$ de elemente din $\mathcal{D}'_E$ converge către elementul $T \in \mathcal{D}'_E$, dacă pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}'_E$, şirul $\{T_n\varphi\}$ converge (în E) către $T\varphi$.

În unele pobleme apar clase speciale de distribuţii, pe care le putem defini fie prin proprietăţi directe, fie utilizînd aceeaşi metodă ca pentru întreg spaţiul $\mathcal{D}'_E$, adică socotindu-le ca aplicaţii liniare continue ale unor spaţii mai largi decît $\mathcal{D}$.

O noţiune importantă prin care se determină anumite clase de distribuţii ce apar în aplicaţii este aceea de suport al distribuţiei.

Se spune că *distribuţia T este nulă pe mulţimea deschisă A* dacă $T\varphi = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, cu suportul inclus în A.

Complementara reuniunii mulţimilor deschise pe care se anulează distribuţia T, se numeşte suportul acestei distribuţii.

Prin definiţie rezultă că suportul unei distribuţii este o mulţime închisă.

Dacă o mulţime A conţine suportul unei distribuţii T, atunci se zice că distribuţia T este concentrată pe mulţimea A.

O primă clasă de distribuţie care apare în legătură cu noţiunea de suport, este formată din distribuţiile cu suport compact.

Se poate demonstra, la fel ca în cazul distribuţiilor scalare, că distribuţiile cu suport compact, considerate ca aplicaţii liniare şi continue ale spaţiului $\mathcal{D}$ în E se pot prelungi în mod biunivoc şi cu păstrarea continuităţii pe spaţiul $\mathcal{E}$ al tututor funcţiilor indefinit derivabile, cu valori complexe. Deci subspaţiul lui $\mathcal{D}_E$, format din distribuţiile cu suport compact este echivalent cu spaţiul $\mathcal{E}'_E = \mathcal{L}(\mathcal{E}, E)$.

În spaţiul $\mathcal{E}$ definim convergenţa şirurilor în modul următor: spunem că şirul $\{\varphi_n\}$ converge către elementul φ, dacă orice derivată a funcţiei φ_n converge către derivata respectivă a funcţiei φ, uniform pe orice compact.

Este evident că spaţiul $\mathcal{D}$ este un subspaţiu al lui $\mathcal{E}$. Să considerăm un şir de elemente din $\mathcal{D}$, convergent către un element din $\mathcal{D}$, în sensul spaţiului $\mathcal{D}$. Atunci acest şir converge către acelaşi element şi în sensul spaţiului $\mathcal{E}$, cum uşor se poate vedea comparînd definiţiile celor două relaţii de convergenţă. Spunem în acest caz că relaţia de convergenţă din $\mathcal{D}$ este mai puternică decît cea din $\mathcal{E}$.

De altă parte există şiruri de elemente din $\mathcal{D}$, care converg, în sensul spaţiului $\mathcal{E}$, către elemente din $\mathcal{E}$, care nu aparţin spaţiului $\mathcal{D}$.

Se poate demonstra mai mult şi anume că orice element din $\mathcal{E}$ este limită de elemente din $\mathcal{D}$ (în sensul spaţiului $\mathcal{E}$).

În $\mathcal{E}'_E$ introducem relaţia de convergenţă la fel ca în cazul lui $\mathcal{D}'_E$: şirul T_n de elemente din $\mathcal{E}'_E$ converge către elementul T dacă pentru orice $\varphi \in \mathcal{E}$, şirul $\{T_n\varphi\}$ converge către $T\varphi$ (în sensul spaţiului E). De aici rezultă că relaţia de convergenţă din $\mathcal{E}'_E$ este mai puternică decît cea din $\mathcal{D}'_E$. Un exemplu de distribuţie numerică cu suportul compact este, evident, distribuţia δ_a.

În unele probleme intervin distribuţii cu suportul limitat la dreapta sau la stînga.

Fie $\mathcal{D}'^{+}_E$ mulţimea distribuţiilor cu suportul mărginit la stînga. Se poate demonstra uşor că elementele spaţiului $\mathcal{D}'^{+}_E$ sînt aplicaţii liniare continue în E ale spaţiului $\mathcal{D}^-$, format din funcţiile indefinit derivabile cu suportul mărginit la dreapta.

În mod analog, spaţiul $\mathcal{D}'^{-}_E$ al distribuţiilor cu suportul mărginit la dreapta este format din aplicaţii liniare şi continue ale spaţiului $\mathcal{D}^+$, al funcţiilor indefinit derivabile cu suportul mărginit la stînga.

8. Un subspaţiu al spaţiului $\mathcal{D}'_E$, cu proprietăţi speciale, îl constituie *distribuţiile temperate*, care sînt aplicaţii liniare continue ale spaţiului $\mathcal{S}$, format din funcţiile indefinit derivabile care descresc rapid la infinit adică satisfac relaţiile

$$\lim_{|t|\to\infty} (1 + |t|^2)^{j/2} \left| \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m}\varphi(t)}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_m^{k_m}} \right| = 0$$

pentru orice $j = 0, 1, 2, \ldots$ şi orice indice de derivare $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Un şir de elemente din spaţiul $\mathcal{S}$ converge către **0** dacă orice expresie de forma :

$$P(t) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m}\varphi(t)}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_m^{k_m}},$$

unde $P(t)$ este un polinom arbitrar, converge către **0** uniform pe tot spaţiul R^m. Relaţia aceasta de convergenţă este mai slabă decît cea din $\mathcal{D}$ (pentru elementele din $\mathcal{D}$, care este un subspaţiu al lui $\mathcal{S}$).

De altă parte, spaţiul $\mathcal{S}$ este inclus în $\mathcal{E}$ şi relaţia de convergenţă din $\mathcal{S}$ este mai puternică decît cea din $\mathcal{E}$.

Spaţiul aplicaţiilor liniare şi continue ale lui $\mathcal{S}$ în E îl vom nota cu $\mathcal{S}'_E$. El conţine, în particular, distribuţiile definite de funcţii majorate de polinoame (pe toată axa reală).

Datorită relaţiei dintre $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{E}$, spaţiul $\mathcal{S}'_E$ conţine toate distribuţiile cu suport compact.

Alte subspaţii importante ale spaţiului $\mathcal{D}'_E$ se obţin prin considerarea aplicaţiilor liniare şi continue ale spaţiilor $C_0^{(k)}$, formate din funcţiile cu suport compact, care admit derivate continue pînă la ordinul k inclusiv $(k = 0,1\ldots)$.

Spaţiul $C_0^{(0)}$, al funcţiilor continue cu suport, compact, îl vom nota, mai simplu, cu C_0.

Un şir $\{\varphi_n\}$ de elemente din $C_0^{(k)}$ converge către 0 dacă toate elementele φ_n au supoturile incluse în acelaşi segment şi converg uniform pe acest segment către 0, împreună cu derivatele pînă la ordinul k, inclusiv.

O aplicaţie liniară şi continuă a lui $C_0^{(k)}$ în E se numeşte *distribuţie de ordinul k*.

Dacă spaţiul valorilor E este un spaţiu Banach, deci, în particular, în cazul distribuţiilor numerice se poate demonstra

echivalența structurilor de convergență introduse de noi, cu anumite structuri topologice sau pseudotopologice. Din această echivalență rezultă, între altele, că spațiile de distribuție considerate sînt complete, în următorul sens: dacă pentru orice element φ din spațiul de bază (pe care sînt definite distribuțiile), șirul $\{T_n\ \varphi\}$ este convergent, atunci limitele obținute definesc o distribuție din spațiul de distribuții considerat.

9. În secțiunea 7 am spus că o distribuție T se zice că este nulă pe o mulțime deschisă A, dacă $T\varphi = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ cu suportul închis în A.

Dacă T_1 și T_2 sînt două distribuții a căror diferență $T_1 - T_2$ este nulă pe mulțimea deschisă A, atunci se zice că T_1 și T_2 sînt egale pe mulțimea A.

O distribuție (scalară) f poate în particular să fie egală pe o mulțime deschisă A, cu o funcție local integrabilă.

De exemplu distribuția lui Dirac δ_a este egală pe mulțimea tuturor punctelor $t \neq a$ cu *funcția identic nulă.*

Distribuția vp $\frac{1}{t}$ este egală cu toate punctele $t \neq 0$ cu funcția $f(t) = \frac{1}{t}$. Ultima funcție este local integrabilă peste tot cu excepția originii (adică se exclude o vecinătate arbitrară a originii).

Mai general, fie $f(t)$ o funcție local integrabilă, cu excepția unui punct t_0. În teoria distribuțiilor și în aplicațiile sale, este important de construit o distribuție (s-o notăm tot cu f) care să fie egală cu funcția $f(t)$ în toate punctele $t \neq t_0$. Dacă o astfel de distribuție f este construită, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, nulă într-o vecinătate a lui t_0, avem:

$$< \varphi, f > = \int \varphi(t) f(t)\, dt.$$

Distribuția f se numește o *regularizare* a funcției $f(t)$.

Nu este greu de văzut că dacă f_1 și f_2 sînt două regularizări diferite ale funcției $f(t)$, atunci diferența dintre f_1 și f_2 este o distribuție concentrată în punctul t_0.

10. Pentru unele aplicații este necesar să se considere distribuții care depind de un parametru.

Să considerăm, pentru simplificare, cazul distribuţiilor scalare care depind de un parametru real.

Fie f_s o distribuţie depinzînd de parametrul s, acest parametru parcurgînd o submulţime a dreptei reale.

Egalitatea

$$g = \lim_{s \to s_0} f_s$$

înseamnă :

$$< \varphi, g > = \lim_{s \to s_0} < \varphi, f_s >$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$.

Funcţia f_s (cu valori în $\mathcal{D}'$) se zice continuă în punctul s_0, dacă

$$f_{s_0} = \lim_{s \to s_0} f_s.$$

Dacă parametrul s aparţine unei mulţimi de numere reale, avînd s_0 ca punct de acumulare şi dacă în acest punct f_s nu este definită, dar dacă f_s este continuă în toate punctele în care este definită, atunci putem pune problema prelungirii prin continuitate. Pentru prelungire este necesar şi suficient să existe

$$\lim_{s \to s_0} < \varphi, f_s >$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$.

Condiţia este evident necesară. Reciproc, dacă limita există pentru orice φ, atunci se poate demonstra că există

$$g = \lim_{s \to s_0} f_s$$

şi vom lua $g = f_{s_0}$.

§ 5. Distribuţii reproduizante

1. Pentru aplicaţiile din capitolul VI, vom întrebuinţa noţiunea de distribuţie reproduizantă, care generalizează noţiunea de nucleu reproduizant introdusă de N. Aronszajn [1].

Întrucît noţiunea de distribuţie reproduizantă poate fi aplicată şi în alte probleme, o prezentăm separat. Acest paragraf nu este necesar pentru capitolele II—V.

2. Fie H un spațiu hilbertian, în care produsul scalar este notat cu $(x|y)$ și în care elementele sînt distribuții.

Considerăm o funcțională K definită pe $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, hermitiană, de tip pozitiv și continuă în raport cu fiecare variabilă.

DEFINIȚIA 1. *Vom spune că funcționala K este o distribuție reproduizantă pentru spațiul H dacă:*

(i) *Pentru orice $\psi \in \mathcal{D}$, distribuția $\varphi \to K(\varphi, \psi) = K_\psi(\varphi)$ este un element din H.*

(ii) *Pentru orice $h \in H$ și $\psi \in \mathcal{D}$,*

$$< \psi, h > = (K_\psi | h).$$

PROPOZIȚIA 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un spațiu hilbertian format din distribuții să admită o distribuție reproduizantă este ca pentru orice $\psi \in \mathcal{D}$, aplicația $h \to < \psi, h >$ să fie continuă pe H.*

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă din (ii), pentru că:

$$| < \psi, h > | \leqslant \| h \| \| K_\psi \|$$

de unde, pentru ψ fix și $h \to 0$ în H, rezultă $< \psi, h > \to 0$

Fie acum H un spațiu hilbertian format din distribuții și satisfăcînd condiția noastră.

Atunci oricărui $\psi \in \mathcal{D}$ îi corespunde un element $K_\psi \in H$ astfel încît:

$$< \psi, h > = (K_\psi | h),$$

pentru orice $h \in H$. Corespondența $\psi \to K_\psi$ este semiliniară, pentru că avem:

$$< \psi_1, h > = (K_{\psi_1} | h)$$

$$< \psi_2, h > = (K_{\psi_2} | h)$$

$$< a\psi_1 + b\psi_2, h > = (K_{a\psi_1 + b\psi_2} | h)$$

și de altă parte:

$$< a\psi_1 + b\psi_2, h > = a < \psi_1, h > + b < \psi_2, h > =$$

$$= a(K_{\psi_1} | h) + b(K_{\psi_2} | h) = (a K_{\psi_1} + b K_{\psi_2} | h)$$

de unde

$$K_{a\psi_1 + b\psi_2} = a K_{\psi_1} + b K_{\psi_2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Definim funcționala $K(\varphi, \psi)$ prin formula :

$$K(\varphi, \psi) = (K_\varphi \mid K_\psi).$$

Funcționala astfel definită este liniară în φ :

$$K(a\varphi_1 + b\varphi_2, \psi) = (K_{a\varphi_1 + b\varphi_2} \mid K_\psi) = <\psi, K_{a\varphi_1 + b\varphi_2}> =$$

$$= <\psi, aK_{\varphi_1} + bK_{\varphi_2}> = a<\psi, K_{\varphi_1}> + b<\psi, K_{\varphi_2}>$$

și semiliniară în ψ.

Ea este de asemenea continuă în fiecare dintre variabile și satisface, prin definiție, condițiile (i) și (ii), deci este o distribuție reproduizantă pentru spațiul H.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă există o distribuție reproduizantă pentru spațiul hilbertian H, ea este unică.*

Demonstrație. Fie K și K' două distribuții reproduizante pentru spațiul H. Atunci :

$$\| K_\psi - K'_\psi \|^2 = (K_\psi - K'_\psi \mid K_\psi - K'_\psi) =$$

$$= (K_\psi - K'_\psi \mid K_\psi) - (K_\psi - K'_\psi \mid K'_\psi) =$$

$$= <\psi, K_\psi - K'_\psi> - <\psi, K_\psi - K'_\psi> = 0$$

de unde rezultă că pentru orice $\psi \in \mathcal{D}$, distribuțiile K_ψ și K'_ψ coincid, deci că pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ și $\psi \in \mathcal{D}$,

$$K(\varphi, \psi) = K'(\varphi, \psi).$$

PROPOZIȚIA 3. *Oricărei aplicații hermitiene, continuă și pozitiv definită K a lui $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ în corpul numerelor complexe îi corespunde un spațiu hilbertian H unic determinat pentru care K este distribuție reproduizantă.*

Demonstrație. Fie H_0 spațiul vectorial al distribuțiilor

$$K_\psi : \varphi \to <\varphi, K_\psi> = K_\psi(\varphi) = K(\varphi, \psi).$$

Expresia

$$(K_{\psi_1} \mid K_{\psi_2}) = K(\psi_1, \psi_2)$$

este hermitiană și pozitiv definită prin ipoteză. Atunci expresia

$$\| K_\psi \| = (K_\psi \mid K_\psi)^{1/2} = [K(\psi, \psi)]^{1/2}$$

are toate proprietățile normelor.

Completînd spațiul H_0 în raport cu această normă, se obține un spațiu hilbertian H, format din distribuții, pentru care sînt verificate condițiile (i) și (ii).

Într-adevăr, elementele acestui spațiu sînt distribuții, pentru că sînt limite (în sensul normei din H_0) de distribuții, iar convergența către 0 în H_0 implică convergența în spațiul $\mathcal{D}$ al distribuțiilor datorită inegalității :

$$|<\varphi, K_\psi>| = |K(\varphi, \psi)| \leqslant \|K_\varphi\| \|K_\psi\|.$$

Condiția (i) este îndeplinită prin construcția lui H.

În ceea ce privește condiția (ii), dacă $\psi_1 \in \mathcal{D}$ și $\psi_2 \in \mathcal{D}$, atunci

$$<\psi_1, K_{\psi_2}> = K(\psi_1, \psi_2) = (K_{\psi_1} | K_{\psi_2}),$$

prin definiție, iar dacă $\psi \in \mathcal{D}$ și

$$h = \lim_{n\to\infty} K_{\psi_n},$$

atunci

$$<\psi, h> = \lim_{n\to\infty} <\psi, K_{\psi_n}> = \lim (K_\psi | K_{\psi_n}) = (K_\psi | h).$$

Unicitatea spațiului H rezultă imediat din condițiile (i) și (ii).

Propoziția 3 este astfel demonstrată.

Această prepoziție, împreună cu § 3, ne dă

PROPOZIȚIA 4. *Presupunem că funcționala hermitiană, continuă și pozitiv definită K (pe spațiul $\mathcal{D}$) este de forma :*

$$K(\varphi, \psi) = \int_Q f_\varphi(q)\, \overline{f_\psi(q)}\, d\mu(q),$$

unde $\varphi \to f_\varphi$ este o aplicație liniară și continuă a lui $\mathcal{D}$ într-un spațiu $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$.

Atunci spațiul hilbertian a cărui distribuție reproduzantă este K, este subspațiul lui $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ generat de elementele f_ψ ($\psi \in \mathcal{D}$).

Demonstrație. Distribuțiile K_ψ sînt definite în acest caz de funcțiile f_ψ, deci spațiul H este generat de aceste funcții.

3. Să considerăm cazul particular al distribuțiilor reproduizante definite de funcții :

Orice funcție $K(s, t)$, local integrabilă, definește pe $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ o funcțională hermitiană și continuă în fiecare variabilă prin formula :

$$(1) \qquad K(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\, \varphi(s)\, \overline{\psi(t)}\, ds dt.$$

Dacă funcția $K(s,t)$ este continuă, atunci expresia (1) poate fi considerată ca restricția unei funcționale biliniare continue pe $C^* \times C^*$, unde C^* este spațiul măsurilor cu suport compact :

$$(2) \qquad K(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\, d\mu \overline{d\nu}, \quad (\mu \in C^*,\ \nu \in C^*).$$

PROPOZIȚIA 5. *Dacă funcția $K(s, t)$ este continuă și funcționala (1) este pozitiv definitivă, atunci și funcționala (2) este pozitiv definită.*

Demonstrație. Fie $\{\varphi_n\}$ un șir de elemente din $\mathcal{D}$, care converg către distribuția lui Dirac, în sensul distribuțiilor. Funcțiile :

$$\mu_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t - s)\, \overline{d\mu(s)}$$

sînt indefinit derivabile și au suporturile închise într-o mulțime mărginită. Rezultă că și funcțiile $\mu_n(t)\ \overline{\mu_n(s)}$ sînt indefinit derivabile și au suporturile egal mărginite.

Faptul că funcționala (1) este pozitiv definită pentru elemente $\varphi \in \mathcal{D}$, ne dă în acest caz :

$$K(\mu_n, \mu_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\, \mu_n(s)\, \overline{\mu_n(t)}\, ds\, dt \geqslant 0.$$

Însă ultima integrală se poate exprima astfel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_n(s - u)\, d\mu(u) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_n(t - v)}\, \overline{d\mu(v)} \right) ds dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\, \varphi_n(s - u)\, \overline{\varphi_n(t - v)}\, ds dt \right) d\mu(u)\, \overline{d\mu(v)}.$$

Pentru că funcțiile ψ_n converg, în sensul distribuțiilor, către distribuția δ, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\varphi_n(s-u)\,\overline{\varphi_n(t-v)}\,ds dt = K(u,v).$$

Obținem deci

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(u,v)\,d\mu(u)\,\overline{d\mu(v)} = \lim_{n\to\infty} K(\mu_n,\mu_n) \geqslant 0$$

și propoziția 5 este demonstrată.

În particular, pentru orice sistem finit de numere $(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ și orice sisteme finite de puncte $(t_1,\ldots,t_m)$, $(s_1,\ldots,s_m)$, are loc inegalitatea :

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} K(s_k,t_j)\,\xi k\,\overline{\xi_j} \geqslant 0. \tag{3}$$

Vom demonstra mai mult și anume :

PROPOZIȚIA 6. *Condiția (3) este necesară și suficientă pentru ca distribuția (1), definită de o funcție continuă, să fie de tip pozitiv.*

Demonstrație. Necesitatea condiției (3) a fost demonstrată mai sus. Suficiența rezultă din faptul că integrala (1) este limită de sume de forma :

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} K(s_k,t_j)\;\varphi(s_k)\;\overline{\psi(t_j)}\;\Delta s_k\;\Delta t_j.$$

4. Spațiul H dat de propoziția 3, în cazul distribuției reproduizante de forma (1), cu $K(s,t)$ funcție continuă, este generat de funcțiile :

$$s \to \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\,\overline{\psi(t)}\,dt, \qquad (\psi \in D) \tag{4}$$

pentru că distribuțiile K_ψ pot fi puse, în acest caz, sub forma

$$\langle \varphi, K_\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\,\overline{\psi(t)}\,dt\right)\varphi(s)\,ds.$$

Cum funcțiile (4) sînt, la rîndul lor, limite de expresii de forma :

$$\sum_{j=1}^{m} K(s, t_j)\,\xi_j, \tag{5}$$

rezultă că spațiul hilbertian a cărui distribuție reproduizantă este (1), este generat de elementele (5).

În acest caz se spune că funcția $K(s, t)$ este un *nucleu reproduizant* pentru spațiul de funcții H.

Noțiunea de nucleu reproduizant se poate introduce și pentru spații hilbertiene de funcții definite pe mulțimi oarecare, independent de teoria distribuțiilor.

DEFINIȚIA 2. *Fie H un spațiu hilbertian de funcții definite pe o mulțime M și K o funcție cu valori scalare, definită pe $M \times M$.*

Funcția K se numește nucleu reproduizant pentru spațiul H, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

(i′) *Pentru orice $t \in M$, funcția $s \to K(s, t)$ aparține spațiului H.*

(ii′) *Pentru orice $h \in H$, și $s \in M$,*

$$h(s) = (h(t) \mid K(s, t)).$$

Teoria nucleelor reproduizante este anterioară teoriei distribuțiilor și are numeroase aplicații. Se pot consulta, în această privință, N. Aronszajn [1], H. Meschkoswki [21], E. Parzen [23].

Rezultatele corespunzătoare propozițiilor de mai sus se pot stabili direct, prin raționamente analoage. Noi reținem următoarea propoziție, care în cazul funcțiilor ce definesc distribuții se deduce din propozițiile 3, 4, 6 și din observația de la începutul acestui aliniat.

PROPOZIȚIA 7. *Oricare funcție $K(s,t)$, care satisface condiția* (3), *este nucleul reproduizant al unui spațiu hilbertian H.*

Dacă funcția K se poate pune sub forma :

$$K(s, t) = \int_Q f_s(q)\, f_t(q)\, d\mu(q),$$

atunci spațiul H este generat de funcțiile $f_t(q)$.

5. Un caz simplu de distribuție reproduizantă, care nu intră în formula (1), este :

$$K(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \overline{\psi(t)}\, dt.$$

Această distribuție are multe aplicații în tehnică și apare de multe ori scrisă sub forma :

$$K(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s - t)\, \varphi(s)\, \overline{\psi(t)}\, ds\, dt$$

în care integrala dublă nu are sens.

Distribuțiile K_ψ sînt date, în cazul distribuției reproduizante (6), de funcțiile $\psi \in \mathcal{D}$. Produsul scalar a două asemenea distribuții este

$$(K_{\psi_1} | K_{\psi_2}) = K(\psi_1, \psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(t)\, \overline{\psi_2(t)}\, dt$$

deci produsul scalar al spațiului hilbertian $L^2(R)$.

Observăm că distribuția (6) se încadrează în propoziția 4, luînd ca spațiu Q dreapta reală și ca măsură μ, măsura Lebesgue pe dreaptă. Aplicația liniară $\psi \to K_\psi$ a lui $\mathcal{D}$ în $L^2(R)$ este aplicația identică.

De aici rezultă că spațiul hilbertian H a cărui distribuție reproduizantă este dată de formula (6), este chiar $L^2(R)$, pentru că $\mathcal{D}$ este dens în acest spațiu.

Observație. Distribuțiile reproduizante au fost considerate pentru prima dată d L. Schwartz [28], sub numele de *antinuclee.* Ele au fost regăsite, independent, de G. Marinescu [20], în legătură cu reprezentarea proceselor stocastice generalizate.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

Operaţii cu distribuţiile

În acest capitol vom studia următoarele operaţii cu distribuţiile : produsul cu funcţii, derivarea, integrarea (nedefinită), convoluţia şi o generalizare a convoluţiei, transformarea Fourier.

Operaţia de derivare este o extensie naturală a operaţiei de derivare a funcţiilor, dar în timp ce nu orice funcţie este derivabilă, vom vedea că o distribuţie este indefinit derivabilă. Integrarea (nedefinită) a distribuţiilor se va introduce ca operaţie inversă derivării.

Operaţia de convoluţie îşi găseşte în teoria distribuţiilor cadrul ei cel mai adecvat. Pe lîngă convoluţie, vom considera şi o operaţie de compunere cu familii de distribuţii, operaţie care conţine drept caz particular convoluţia distribuţiilor.

Transformarea Fourier a distribuţiilor va face obiectul ultimului paragraf.

§ 1. Produsul unei distribuţii printr-o funcţie

1. Vom introduce o operaţie de înmulţire a distribuţiilor prin funcţii care vor extinde operaţia de înmulţire a două funcţii.

Înmulţirea unei distribuţii printr-o funcţie local integrabilă nu va fi însă totdeauna posibilă, după cum se va vedea mai departe.

Fie E un spaţiu Banach şi T o distribuţie cu valori în E. Fie $a = a(t)$ o funcţie (completă) indefinit derivabilă pe R^m.

Definim produsul aT dintre funcția a și distribuția T, ca fiind distribuția definită de formula

$$(aT)\varphi = T(\bar{a}\varphi). \tag{1}$$

Să observăm că formula are sens, deoarece dacă $\varphi \in \mathcal{D}$ iar a este o funcție indefinit derivabilă, atunci $a\varphi \in \mathcal{D}$. Dacă $\varphi_n \to 0$ în spațiul $\mathcal{D}$, atunci și $\bar{a}\varphi_n \to 0$ în spațiul $\mathcal{D}$. Cum T este continuă,

$$T(\bar{a}\varphi_n) \to 0,$$

deci aT este continuă. Aplicația aT este evident și liniară, deci este o distribuție.

În cazul unei distribuții (scalare) dată de o funcție local integrabilă $f(t)$, prin înmulțirea cu o funcție indefinit derivabilă $a(t)$, se obține tocmai distribuția dată de funcția $a(t)f(t)$.

Într-adevăr,

$$<\varphi, af> = <\bar{a}\varphi, f> = \int [\overline{a(t)}\varphi(t)]\,\overline{f(t)}\,dt =$$

$$= \int \varphi(t)\,\overline{a(t)\,f(t)}\,dt$$

adică af este distribuția dată de funcția $a(t)\,f(t)$.

2. Să observăm că produsul unei distribuții printr-o funcție indefinit derivabilă poate fi nul, fără ca nici unul din factori să fie nul.

Este suficient să luăm ca exemplu distribuța lui Dirac înmulțită cu o funcție indefinit derivabilă $a(t)$ care se anulează în origine.

Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$<\varphi, a\delta> = <\bar{a}\varphi, \delta> = \bar{a}(0)\,\varphi(0) = 0$$

deci $a\delta = 0$.

Mai general, dacă $a(t)$ este o funcție indefinit derivabilă și dacă $a(t_0) = 0$, atunci

$$a(t)\,\delta(t - t_0) = 0.$$

În particular avem

$$t\,\delta(t) = 0.$$

În cazul distribuțiilor (scalare) definite pe $\mathcal{D}(R)$ putem stabili ușor că dacă $a(t)$ este o funcție indefinit derivabilă

pentru care originea este singura sa rădăcină și anume rădăcină simplă, atunci distribuția f verifică egalitatea

$$a(t)f = 0 \tag{2}$$

dacă și numai dacă f este de forma

$$f = \alpha\delta, \tag{3}$$

unde α este un anumit număr.

Este suficient să stabilim aceasta pentru cazul cînd $a(t) \equiv t$, deci pentru

$$tf = 0. \tag{4}$$

Într-adevăr, funcția

$$b(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a(t)} \text{ dacă } t \neq 0 \\ \dfrac{1}{a'(0)} \text{ dacă } t = 0 \end{cases}$$

este indefinit derivabilă; dacă (2) are loc, atunci

$$tf = b(t)\,a(t)f = 0,$$

adică are loc (4). Reciproc, dacă are loc (4), atunci are loc (2).

Am văzut mai înainte că $t\delta = 0$ și deci și $t(\alpha\delta) = \alpha t\delta = 0$, oricare ar fi numărul α.

Reciproc, să presupunem că are loc (4). Atunci

$$< t\varphi, f > \; = \; < \varphi, tf > \; = 0,$$

deci f se anulează pe mulțimea funcțiilor $\psi \in \mathcal{D}$ de forma:

$$\psi(t) = t\varphi(t). \tag{5}$$

Mulțimea funcțiilor de forma (5) coincide cu mulțimea funcțiilor $\psi \in D$ care se anulează în origine.

Într-adevăr, dacă $\psi(0) = 0$, atunci funcția:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi(t)}{t} \text{ dacă } t \neq 0 \\ \psi'(0) \text{ dacă } t = 0 \end{cases}$$

este indefinit derivabilă, deci $\varphi \in \mathcal{D}$. Funcția $\psi(t)$ este deci de forma (5).

Fie $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ aşa că $\varphi_0(0) = 1$. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ putem scrie

$$\varphi(t) = \lambda\varphi_0(t) + \psi(t),$$

unde $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi(0) = 0$ iar $\lambda = \varphi(0)$.

Avem

$$<\psi, f> = <t\varphi(t), f> = 0$$

şi deci

$$<\varphi, f> = \lambda < \varphi_0, f> = \varphi(0) <\varphi_0, f> = \alpha\varphi(0),$$

unde s-a notat $\alpha = <\varphi_0, f>$. Rezultă $f = \alpha\delta$.

3. După cum am văzut mai sus, produsul unei distribuţii printr-o funcţie indefinit derivabilă este totdeauna posibil.

Dacă T este o distribuţie de ordinul m, atunci produsul aT are sens pentru orice funcţie $a(t)$ care are derivate continue pînă la ordinul m.

Într-adevăr, în acest caz, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, avem $\bar{a}\varphi \in C_0^{(m)}$ şi T fiind de ordinul m, are sens $T(\bar{a}\ \varphi)$. Are deci sens formula (1) şi ca mai înainte defineşte o distribuţie.

De exemplu distribuţia lui Dirac este de ordinul zero şi deci $a(t)\delta(t)$ are sens pentru orice funcţie continuă $a(t)$.

Mai mult, deoarece δ are ca suport originea, produsul $a(t)\delta(t)$ are sens pentru orice funcţie care este continuă într-o vecinătate a originii şi are loc egalitatea

$$a(t)\delta(t) = a(0)\delta(t).$$

În general, dacă pentru o distribuţie T are sens produsul cu o funcţie $a(t)$, atunci funcţia se numeşte multiplicator pentru distribuţia T.

4. Fie f o distribuţie de forma:

$$f(t) = \operatorname{vp}\frac{1}{t} + \alpha\delta(t), \tag{6}$$

unde α este un număr.

Dacă înmulţim ambele părţi ale lui (6) prin funcţia $a(t) \equiv t$, obţinem

$$tf(t) = 1. \tag{7}$$

Într-adevăr, după cum am văzut mai înainte, $t\delta(t) = 0$, deci rămîne de arătat că

$$t \operatorname{vp}\frac{1}{t} = 1. \tag{8}$$

Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ avem

$$<\varphi, t\,\mathrm{vp}\frac{1}{t}> = <t\varphi, \mathrm{vp}\,\frac{1}{t}> = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\varphi(t)}{t}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = <\varphi, 1>,$$

de unde rezultă (8).

Deci distribuțiile de forma (6) sînt soluții ale ecuației (7). Reciproc, să arătăm că orice soluție a ecuației (7) este de forma (6).

Cu egalitatea (8), o soluție a ecuației (6) este distribuția $f_0(t) = \mathrm{vp}\,\frac{1}{t}$. Dacă $f_1(t)$ este o altă soluție, atunci

$$tf_0(t) = tf_1(t)$$

și deci

$$t[f_1(t) - f_0(t)] = 0.$$

Dar egalitatea (4) (în care înlocuim pe f prin $f_1 - f_0$) am văzut că implică (3). Deci

$$f_1(t) - f_0(t) = \alpha\delta(t).$$

Rezultă că $f_1(t)$ este de forma (6).

Se știe că în teoria funcțiilor soluția ecuației (7) este dată de funcția $f_1(t)$ care este egală cu $\frac{1}{t}$ în toate punctele $t \neq 0$, în punctul $t = 0$ funcția nefiind definită. În teoria distribuțiilor soluția ecuației (7) este dată de (6) care se scrie mai simplu și sub forma:

$$\frac{1}{t} + \alpha\delta(t).$$

Să considerăm acum cazul mai general al ecuației de forma:

(9) $$a(t)f(t) = 1,$$

unde $a(t)$ este o funcție indefinit derivabilă pentru care originea este singura sa rădăcină și anume rădăcina simplă. În acest caz soluția ecuației (9) este

(10) $$f(t) = \frac{1}{a(t)} + \alpha\delta(t),$$

unde prin $\frac{1}{a(t)}$ se înțelege o distribuție g egală cu funcția în toate punctele $t \neq 0$. Ea se definește prin formula

$$<\varphi, g> = \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{a(t)}\, dt$$

și se vede ușor că $a(t)g = 1$.

§ 2. Derivarea și integrarea distribuțiilor

1. Operația de derivare este o aplicație liniară și continuă a spațiului $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R)$ în el însuși ; liniaritatea este bine cunoscută, iar continuitatea se verifică imediat conform definiției convergenței : dacă șirul φ_n de elemente din $\mathcal{D}$ converge către 0, atunci și șirul derivatelor φ_n' converge către 0.

Acest fapt ne dă posibilitatea să definim operația de derivare și în spațiul distribuțiilor.

Cu excepția ultimei secțiuni, în acest paragraf vom considera distribuția pe spațiul $\mathcal{D}(R)$.

Fie E un spațiu Banach și T o distribuție cu valori în E. Definim derivata T' a distribuției T prin formula :

$$T'\varphi = -T\varphi'. \tag{1}$$

Obținem, cum ușor se vede, o nouă distribuție, adică o nouă aplicație liniară și continuă a spațiului $\mathcal{D}$ în E. Într-adevăr,

$$T'(a\varphi_1 + b\varphi_2) = -T(a\varphi_1' + b\varphi_2') = -aT\varphi_1' - bT\varphi_2' =$$

$$= aT\varphi_1 + bT\varphi_2$$

și dacă $\varphi_n \to 0$, atunci și $\varphi_n' \to 0$, deci, datorită continuității operației T, rezultă și $T\varphi_n' \to 0$ și, în definitiv, $T'\varphi_n \to 0$.

Deci, prin formula (1), orice distribuție este derivabilă ; dacă iterăm această formulă, constatăm că orice distribuție este indefinit derivabilă și derivatele succesive sînt date de formula

$$T^{(n)}\varphi = (-1)^n T\varphi^{(n)}. \tag{2}$$

Operația de derivare $T \to T'$ este o aplicație liniară și continuă a spațiului $\mathcal{D}'_E$ în el însuși. Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(aT_1 + bT_2)'\varphi = -(aT_1 + bT_2)\varphi' = -aT_1\varphi' - bT_2\varphi' =$$
$$= aT_1'\varphi + bT_2'\varphi,$$

ceea ce înseamnă că:

$$(aT_1 + bT_2)' = aT_1' + bT_2',$$

iar dacă șirul T_n de elemente din $\mathcal{D}'_E$ converge către $\mathbf{0}$, adică dacă $T_n\varphi \to \mathbf{0}$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, atunci și $T_n\varphi' \to 0$, deci și $T_n'\varphi \to \mathbf{0}$, de unde rezultă că șirul T_n' converge către $\mathbf{0}$.

În cazul produsului dintre o funcție indefinit derivabilă (de o variabilă) $a(t)$ și o distribuție T, are loc formula obișnuită de derivare:

$$(aT)' = a'T + aT'.$$

Într-adevăr, considerînd de exemplu cazul funcțiilor reale, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ putem scrie:

$$(aT)'\varphi = -(aT)\varphi' = -T(a\varphi') = -T((a\varphi)' - a'\varphi) =$$
$$= -T(a\varphi)' + T(a'\varphi) = T'(a\varphi) + T(a'\varphi) = aT'\varphi +$$
$$+ a'T\varphi = (aT' + a'T)\varphi,$$

de unde rezultă formula căutată.

2. Am văzut că noțiunea de distribuție este o extensiune a noțiunii de funcție. Vom constata că și operația de derivare definită prin formula (1) este o extensiune naturală a operției de derivare a funcțiilor.

Dacă distribuția T este dată de o funcție x cu valori în spațiul Banach real E și care are derivata continuă x', atunci derivata ei este distribuția dată de funcția x'.

Într-adevăr, distribuția T este dată de formula:

$$T\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)x(t)\,dt,$$

iar

$$T'\varphi = -T\varphi' = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(t)x(t)\mathrm{d}t = -\varphi(t)x(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)x'(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)x'(t)\mathrm{d}t.$$

Dacă funcția x nu are derivata continuă, atunci derivata distribuției T nu coincide, în general, cu distribuția dată de funcția x' (în ipoteza că această funcție este definită aproape peste tot și local integrabilă).

Să considerăm, ca exemplu, funcția lui Heaviside:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t < 0, \\ 1 \text{ pentru } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Această funcție are derivata:

$$\theta'(t) = 0$$

în toate punctele $t \neq 0$. În $t = 0$, funcția $\theta(t)$ nu are derivată.

Distribuția dată de funcția $\theta'(t)$ este, evident, identic nulă, pe cînd distribuția θ are derivata θ' dată de formula

$$(3) \quad <\varphi, \theta'> = -<\varphi', \theta> = -\int_0^{\infty} \varphi'(t)\mathrm{d}t = \varphi(0) = <\varphi, \delta>.$$

Deci derivata distribuției θ este distribuția δ.

Derivata a doua a distribuției lui Heaviside este derivata distribuției lui Dirac și este dată de formula

$$(4) \quad <\varphi, \theta''> = <\varphi, \delta'> = -<\varphi', \delta> = -\varphi'(0)$$

și, în general,

$$(5) \quad <\varphi, \theta^{(n)}> = <\varphi, \delta^{(n-1)}> = (-1)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(0).$$

Are de asemenea loc egalitatea

$$<\varphi, \delta^{(n)}> = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

Să observăm că dacă $a(t)$ este o funcție (reală) de o variabilă, care are o derivată continuă într-o vecinătate a originii x, atunci:

$$(6) \quad a\delta' = a(0)\delta' - a'(0)\delta.$$

Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(R)$,

$$< \varphi,\ a\delta' > = < a\varphi,\ \delta' > = -(a\varphi)'(0) = -a(0)\,\varphi'(0) - a'(0)\,\varphi(0) = < \varphi,\ a(0)\,\delta' - a'(0)\,\delta >,$$

de unde rezultă (6).

În particular, dacă luăm $a(t) \equiv t$, aunci

$$t\delta' = -\delta.$$

Mai general, se poate stabili egalitatea

$$t\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)},$$

oricare ar fi n.

Cu ajutorul acestei egalități se verifică prin inducție că

$$t^{n+1}\,\delta^n = 0,$$

oricare ar fi n.

Să calculăm acum derivata distribuției definită de funcția $\ln|t|$.

Avem

$$< \varphi, (\ln|t|)' > = - < \varphi', \ln|t| > = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln|t|\varphi'(t)\,dt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \ln|t|\,\varphi'(t)dt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[(\ln|t|\,\varphi(t))_{-\infty}^{-\varepsilon} + (\ln|t|\varphi(t))_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = < \varphi,\ \mathrm{vp}\,\frac{1}{t} > .$$

Deci

$$(\ln|t|)' = \mathrm{vp}\,\frac{1}{t}.$$

S-a arătat mai înainte ce se înțelege prin distribuție nulă pe o mulțime deschisă. Două distribuții se zic egale pe o mulțime deschisă, dacă diferența lor este nulă pe acea mulțime.

Scanned with OKEN Scanner

Putem deci afirma că derivata distribuției $\ln|t|$ este o distribuție care este egală în toate punctele $t \neq 0$ cu funcția $\frac{1}{t}$.

3. Fie acum T o distribuție dată de o funcție x (cu valori în spațiul Banach real E) care are o derivată continuă x', peste tot, cu excepția punctului t_0.

Presupunem însă că există limita la dreapta și limita la stînga ale funcției x în punctul t_0:

$$x(t_0 +) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} x(t),$$

$$x(t_0 -) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} x(t).$$

Atunci derivata distribuției T va fi:

$$-T'\varphi = \int_{-\infty}^{t_0} \varphi'(t)\, x(t)\, dt + \int_{t_0}^{\infty} \varphi'(t)\, x(t)\, dt =$$

$$= \varphi(t)\, x(t)\Big|_{-\infty}^{t_0} - \int_{-\infty}^{t_0} \varphi(t)\, x'(t)\, dt +$$

$$+ \varphi(t)\, x(t)\Big|_{t_0}^{\infty} - \int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\, x'(t)\, dt =$$

$$= \varphi(t_0)\,[x(t_0 -) - x(t_0 +)] - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, x'(t)\, dt.$$

Dacă notăm cu $\hat{T}'$ distribuția dată de funcția x' și cu $s(t_0)$ saltul funcției x în punctul t_0:

$$s(t_0) = x(t_0 +) - x(t_0 -),$$

atunci formulele precedente ne dau

$$T' = \hat{T}' + s(t_0)\, \delta_{t_0}.$$

Mai general, dacă funcția x are derivata continuă peste tot, cu excepția unei mulțimi de puncte izolate t_i, unde funcția are salturile $s(t_i)$, atunci

$$T' = \hat{T}' + \sum_i s(t_i)\, \delta_{t_i}. \tag{7}$$

Vom da două exemple simple.

Să considerăm mai întîi funcția reală $f(t)$ (fig. 1) dată de formulele :

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{dacă } t < 0, \\ t + \lambda & \text{dacă } t > 0, \end{cases}$$

unde $\lambda > 0$.

În acest caz funcția $f(t)$ are derivata continuă în orice punct $t \neq 0$ și $f'(t) = 1$. În origine funcția $f(t)$ are un salt egal cu λ.

Derivata lui f este deci distribuția

$$f' = 1 + \lambda\delta.$$

Să considerăm acum funcția (fig. 2) :

$$g(t) = \begin{cases} \gamma & \text{dacă } t < 0, \\ \alpha t + \beta & \text{dacă } t > 0, \end{cases}$$

unde $\lambda = \beta - \gamma > 0$.

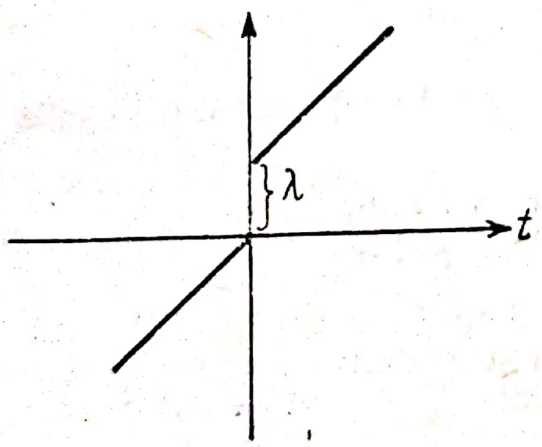


Fig. 1. — Graficul funcției $f(t)$.

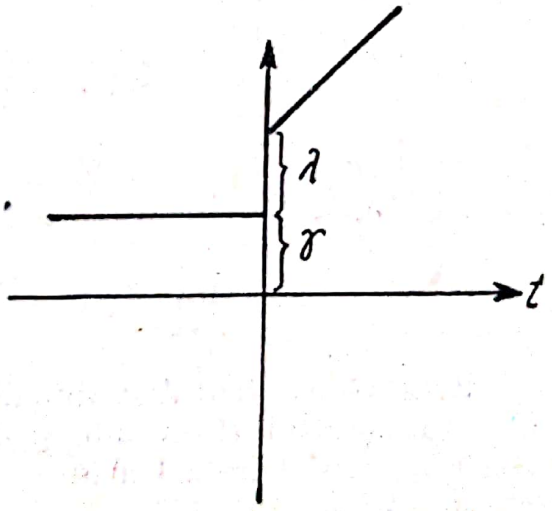


Fig. 2. — Graficul funcției $g(t)$.

În punctele $t < 0$, funcția are derivata nulă, iar în punctele $t > 0$, funcția are derivata egală cu α. În origine funcția are un salt egal cu λ. Deci

$$g' = \alpha\theta + \lambda\delta,$$

unde θ este funcția lui Heaviside.

Scanned with OKEN Scanner

4. Am văzut mai înainte că derivata distribuției lui Heaviside este distribuția lui Dirac.

Aceasta permite a „aproxima" distribuția lui Dirac prin funcții. Mai precis, vom arăta că putem găsi un șir $\{f_n\}$ de funcții astfel încît șirul distribuțiilor definite de aceste funcții să tindă către distribuția δ în sensul convergenței spațiului $\mathcal{D}'$.

Fie $\{f_n\}$ un șir de funcții local integrabile pe dreaptă, care verifică condițiile următoare :

(i) Pentru orice număr $\lambda > 0$ există un număr $\mu(\lambda)$ astfel ca :

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\, dt \right| < \mu(\lambda)$$

dacă $|\alpha|, |\beta| \leqslant \lambda$.

(ii) Oricare ar fi numerele nenule α, β așa ca $\alpha < \beta$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(t)\, dt = \begin{cases} 0 \text{ dacă } 0 \notin (\alpha, \beta), \\ 1 \text{ dacă } 0 \in (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Să punem acum

$$F(t) = \int_{-1}^{t} f_n(t)\, dt.$$

Șirul $\{F_n(t)\}$ este uniform mărginit în raport cu n, în orice interval finit. Pe de altă parte :

$$\lim_{n\to\infty} F(t) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } t < 0, \\ 1 \text{ dacă } t > 0. \end{cases}$$

Rezultă că șirul distribuțiilor definite de funcțiile F_n tinde către funcția lui Heaviside și deci șirul derivatelor tinde către distribuția lui Dirac. Cu alte cuvinte $f_n \to \delta$ în sensul convergenței din spațiul $\mathcal{D}'$.

Putem construi ușor un șir $\{f_n\}$ de funcții care să verifice condițiile (i), (ii).

De exemplu, dacă $\{\varepsilon_n\}$ este un șir de numere pozitive care tinde către zero, putem lua

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon_n}{t^2 + \varepsilon_n^2},$$

după cum se verifică cu ușurință.

Şirul funcţiilor de forma :

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nt}{t}$$

verifică de asemenea condiţiile (i), (ii).

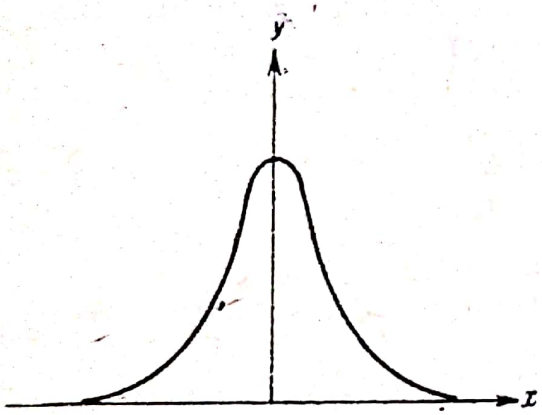


Fig. 3. — Graficul funcţiei

$$f_1(t) = \frac{1}{\pi} \frac{0{,}2}{t^2 + (0{,}2)^2}.$$

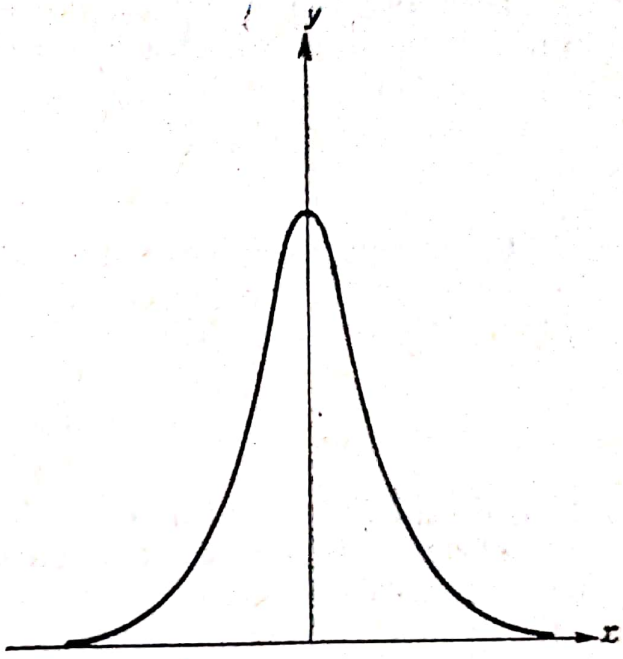


Fig. 4. — Graficul funcţiei

$$f_2(t) = \frac{1}{\pi} \frac{0{,}1}{t^2 + (0{,}1)^2}.$$

S-ar mai putea da şi alte exemple.

Astfel de funcţii sînt importante în aplicaţii practice.

5. Ca aplicaţie la derivarea distribuţiilor putem de asemenea stabili convergenţa (în sensul teoriei distribuţiilor) a seriilor Fourier.

Să considerăm o funcţie $f(t)$ local integrabilă şi de perioadă 2π. Fie c_n coeficienţii Fourier ai lui $f(t)$:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt.$$

Se ştie din Analiza matematică că există o funcţie absolut continuă $F(t)$ astfel încît :

$$c_0 t + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \frac{c_n}{in} e^{int} = F(t), \tag{8}$$

seria fiind convergentă uniform.

Derivînd ambele părţi ale egalităţii (8), ţinînd seama de liniaritatea şi continuitatea operaţiei de derivare în spaţiul $\mathcal{D}'$, obţinem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = f(t).$$

6. Să considerăm acum o distribuţie scalară f_s care depinde de parametrul real s. Derivata g_{s_0} a lui f_s în raport cu parametrul s, pentru $s = s_0$, se introduce prin formula obişnuită :

$$g_{s_0} = \lim_{s \to s_0} \frac{f_s - f_{s_0}}{s - s_0}$$

dacă limita (în sensul distribuţiilor) există.

Distribuţia g_{s_0}, există, dacă şi numai dacă pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ funcţia

$$\psi(s) = < \varphi, f_s >$$

este derivabilă în $s = s_0$.

Într-adevăr, necesitatea este evidentă, deoarece

$$< \varphi, \frac{f_s - f_{s_0}}{s - s_0} > = \frac{< \varphi, f_s > - < \varphi, f_{s_0} >}{s - s_0}. \tag{9}$$

Reciproc, dacă $\psi(s)$ este derivabilă, atunci există limita în $s = s_0$ a membrului stîng a lui (9) şi

$$\lim_{s \to s_0} < \varphi, \frac{f_s - f_{s_0}}{s - s_0} > = \psi'(s_0).$$

Deoarece limita există pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, rezultă (vezi şi secţiunea 10, § 4, Cap. I) că există g_{s_0} şi :

$$< \varphi, g_{s_0} > = \psi'(s_0). \tag{10}$$

Dacă există g_s pentru orice punct s aparținînd unui domeniu A, se zice că f_s este derivabilă în raport cu s în domeniul A.

Se mai notează

$$g_s = \frac{\partial f_s}{\partial s}.$$

Cu (10) putem de asemenea scrie

$$< \varphi, \frac{\partial f_s}{\partial s} > = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} < \varphi, f_s >.$$

7. Integrarea (nedefinită) a distribuțiilor se poate defini ca operație inversă derivării.

Spunem că distribuția T este o primitivă a distribuției S, dacă

$$T' = S. \tag{11}$$

TEOREMA 1. *Orice distribuție admite o infinitate de primitive. Două primitive ale aceleiași distribuții diferă între ele printr-o constantă.*

Demonstrație. Fie S o distribuție dată. Determinarea primitivelor distribuției S, înseamnă rezolvarea ecuației (11), în care T este distribuția necunoscută.

Ecuația (11) este echivalentă cu

$$T'\varphi = S\varphi, \tag{12}$$

deci cu

$$T\varphi' = -S\varphi, \tag{13}$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$.

Relația (13) ne arată că distribuția T este definită pe mulțimea elementelor $\psi \in \mathcal{D}$, de forma :

$$\psi = \varphi', \tag{14}$$

cu $\varphi \in \mathcal{D}$.

Mulțimea acestor elemente este caracterizată de relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt = 0. \tag{15}$$

Într-adevăr, dacă ψ satisface relația (14) cu $\varphi \in \mathcal{D}$, atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt = \varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Invers, dacă $\psi \in \mathcal{D}$ și satisface relația (15), atunci ψ are o primitivă:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\,ds$$

care este, evident, funcție indefinit derivabilă; fie $[t_1, t_2]$ cel mai mic segment în care este inclus suportul funcției ψ: dacă $t < t_1$, atunci $\varphi(t) = 0$, pentru că $\psi(s) = 0$ pentru $-\infty < s \leqslant t$ și dacă $t > t_2$, atunci $\varphi(t) = 0$ pentru că

$$\int_{-\infty}^{t} \psi(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\,ds = 0, \qquad (t > t_2).$$

Observăm acum că orice element $\chi \in \mathcal{D}$ se poate pune în mod univoc sub forma:

$$\chi = \psi + \lambda\varphi_0, \tag{16}$$

unde ψ este de forma (14) cu $\varphi \in \mathcal{D}$ și φ_0 satisface relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t)\,dt = 1. \tag{17}$$

Într-adevăr, dacă integrăm relația (16), ținînd seama de (15) și (17), obținem

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\,dt$$

și pe ψ îl determinăm din (16):

$$\psi = \chi - \lambda\varphi_0.$$

Atunci, pentru a determina distribuția T, este suficient să luăm valoarea ei în φ_0.

Vom avea

$$T\chi = T\psi + \lambda T\varphi_0 = -S\varphi + \lambda T\varphi_0. \tag{18}$$

Pentru două valori $T_1\varphi_0$ și $T_2\varphi_0$ corespund două soluții $T_1\chi$ și $T_2\chi$, a căror diferență este:

$$T_1\chi - T_2\chi = \lambda(T_1\varphi_0 - T_2\varphi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\,(T_1\varphi_0 - T_2\varphi_0)dt$$

de unde se vede că diferența aceasta operează asupra funcției χ ca o constantă, conform formulei (2) din § 1.

8. În particular, ecuația

$$T' = 0 \tag{19}$$

admite ca soluții toate constantele (elemente din E) și numai acestea.

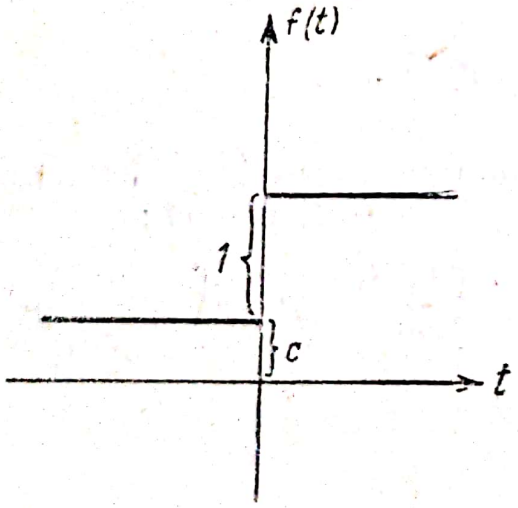


Fig. 5. — Soluția ecuației (17).

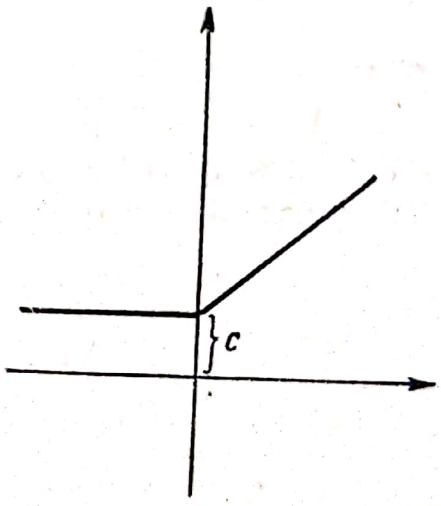


Fig. 6. — Soluția ecuației (19).

Dacă T este un vector cu componente distribuții, care satisface ecuația (19), atunci el este format din constante (elemente din E).

Ecuația (în distribuții obișnuite)

$$f' = \delta \tag{20}$$

admite ca soluție funcția lui Heaviside, deci orice soluție a ei este de forma :

$$f(t) = \theta(t) + c, \tag{21}$$

unde θ este funcția lui Heaviside și c un număr complex oarecare. Soluțiile reale ale acestei ecuații au graficele ca în figura 5.

Ecuația

$$f' = \theta, \tag{22}$$

unde θ este funcția lui Heaviside, are soluțiile (fig. 6) :

$$f(t) = \begin{cases} c & \text{pentru } t < 0, \\ c + t & \text{pentru } t \geqslant 0. \end{cases} \tag{23}$$

9. În cazul distribuțiilor pe $\mathcal{D}(R^m)$ se pot introduce derivate parțiale.

Dacă T este o distribuție cu valori în spațiul Banach E, definim derivata parțială $\frac{\partial T}{\partial t_k}$ a lui T prin formula :

$$\frac{\partial T}{\partial t_k}\varphi = -T\frac{\partial \varphi}{\partial t_k}.$$

Dacă f este distribuția dată de funcția reală $f(t)$ care admite derivată parțială continuă în raport cu t_k, atunci :

$$<\varphi, \frac{\partial f}{\partial t_k}> = <-\frac{\partial \varphi}{\partial t_k}, f> = -\int \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_k} f(t)\mathrm{d}t = \int \varphi(t)\frac{\partial f(t)}{\partial t_k}\mathrm{d}t,$$

adică distribuția $\frac{\partial f}{\partial t_k}$ este dată de derivata obișnuită a funcției $f(t)$ în raport cu t_k.

Se pot introduce de asemenea derivate parțiale de ordin superior. De exemplu :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t_j\, \partial t_k}\varphi = \left[\frac{\partial}{\partial t_k}\left(\frac{\partial T}{\partial t_j}\right)\right]\varphi = -\frac{\partial T}{\partial t_j}\frac{\partial \varphi}{\partial t_k} = T\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_k\, \partial t_j} =$$

$$= T\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_j\, \partial t_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial t_k\, \partial t_j}\varphi,$$

adică avem totodată :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t_j \, \partial t_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial t_k \, \partial t_j}.$$

În general are loc formula :

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \ldots \partial t_m^{\alpha_m}} \varphi = (-1)^\alpha T \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \ldots \partial t_m^{\alpha_m}}$$

unde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$.

Fie Δ un domeniu din R^2, mărginit de o curbă închisă parțial netedă Γ și $f(s, t)$ o funcție (reală) definită pe R^2, nulă în afara lui Δ, și admițînd derivate parțiale (de ordinul întîi) continue în interiorul lui Δ (funcția $f(s, t)$ admițînd salturi pe curba Γ).

Atunci :

$$< \varphi, \frac{\partial f}{\partial s} > = -\int_\Gamma f(s,t)\, \varphi(s,t)\, dt + \iint_\Delta \frac{\partial f(s,t)}{\partial s} \varphi(s,t)\, ds\, dt.$$

$$< \varphi, \frac{\partial f}{\partial t} > = -\int_\Gamma f(s,t)\, \varphi(s,t)\, ds + \iint_\Delta \frac{\partial f(s,t)}{\partial s} \varphi(s,t)\, ds\, dt,$$

după cum se poate verifica.

În cazul spațiului R^3, curba Γ se înlocuiește cu o suprafață închisă, iar integrala curbilinie printr-o integrală de suprafață. Integrala dublă se înlocuiește evident cu o integrală triplă.

Se pot stabili formule asemănătoare și în cazul particular R^m cu $m > 3$.

Fie acum A un operator diferențial liniar :

$$A = \sum_k a_k(t_1, t_2, \ldots, t_m) \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_m}}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_m^{k_m}},$$

unde $a_k(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ sînt funcții indefinit derivabile iar $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Dacă T este o distribuție cu valori în E, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(R^m)$

$$(AT)\,\varphi = \left(\sum_k a_k(t_1, t_2, \ldots, t_m) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m}}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_m^{k_m}} T \right) \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m) =$$

$$= \sum_k \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m} T}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_m^{k_m}} \bar{a}_k \varphi = \sum_k T\left((-1)^{k_1+\ldots+k_m} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m}}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_m^{k_m}} \bar{a}_k \varphi \right).$$

Notînd cu A^* operatorul conjugat lui A:

$$A^* \varphi = \sum_k (-1)^{k_1+\ldots+k_m} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m}}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_m^{k_m}} \bar{a}_k \varphi$$

rezultă

$$(AT)\,\varphi = T(A^* \varphi).$$

§ 3. Convoluția distribuțiilor

1. O operație care își găsște în teoria distribuțiilor cadrul cel mai potrivit este convoluția, care în cazul a două funcții sumabile f și g se exprimă prin formula:

$$(1) \qquad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Noi vom defini două feluri de convoluții: convoluția unei distribuții vectoriale cu o distribuție scalară (numerică) și convoluția unei distribuții operatoriale cu o distribuție vectorială.

Amîndouă definițiile conțin, în particular, convoluția a două distribuții scalare.

2. Fie T o distribuție cu valori în spațiul Banach E și f o distribuție scalară.

Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, expresia

$$(2) \qquad \psi(t) = \langle \varphi(t + \xi), f(\xi) \rangle$$

definește o funcție (scalară) de variabila t.

Se poate demonstra ușor că funcția ψ este indefinit derivabilă.

Într-adevăr, funcția

$$\lambda(t, h) = \frac{1}{h}\,[\psi(t + h) - \psi(t)]$$

se poate pune sub forma :

$$\lambda(t, h) = <\frac{1}{h}\,[\varphi(t + h + \xi) - \varphi(t + \xi)], f(\xi)> =$$

$$= <\varphi'(t + \theta h + \xi), f(\xi)>, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Pentru t fix și h mărginit, funcția $\varphi'(t + \theta h + \xi)$ (ca funcție de ξ) are suportul inclus într-un segment finit. Cînd $h \to 0$, funcția $\varphi'(t + \theta h + \xi)$ tinde către $\varphi'(t + \xi)$ în sensul convergenței din spațiul $\mathcal{D}$, deci putem scrie

$$\lim_{h \to 0} \lambda(t, h) = <\lim_{h \to 0} \varphi'(t + \theta h + \xi), f(\xi)> = <\varphi'(t + \xi), f(\xi)>,$$

ceea ce ne arată că funcția ψ este derivabilă.

În mod analog se poate stabili, din aproape în aproape, că funcția ψ are derivate de orice ordin, date de formula :

$$\psi^{(n)}(t) = <\varphi^{(n)}(t + \xi), f(\xi)>. \tag{3}$$

Notăm că, potrivit cu definiția derivatelor unei distribuții, se mai poate scrie :

$$\psi^{(n)}(t) = (-1)^n < \varphi(t + \xi), f^{(n)}(\xi) >. \tag{3'}$$

Însă, în general, funcția ψ nu are suportul compact.

Vom considera mai întîi următoarele trei cazuri particulare :

a) distribuția f are suportul compact ;

b) distribuția T are suportul compact ;

c) distribuțiile f și T au suporturile mărginite de aceeași parte.

În toate trei cazuri are sens formula :

$$(f * T)\,\varphi = T\,\psi \tag{4}$$

pe care o luăm ca definiție pentru convoluția $f * T$ a distribuției f cu distribuția T.

În cazul *a*), funcția ψ are suportul compact, pentru că, dacă (t) este suficient de mare, suportul funcției $\varphi(t + \xi)$

(ca funcție de ξ) nu intersectează suportul distribuției f. În acest caz expresia $T\psi$ este bine definită.

În al doilea caz, am văzut (§ 1) că distribuția T se extinde la spațiul $\mathcal{E}$, al tuturor funcțiilor indefinit derivabile, deci și în acest caz expresia $T\psi$ are sens.

În cazul *c*), să presupunem că f și T au suporturile mărginite la stînga; atunci, dacă t este suficient de mare, suportul funcției $\varphi(t+\xi)$, care se îndepărtează înspre stînga cînd t crește, nu mai intersectează suportul distribuției f; deci funcția ψ are suportul mărginit la dreapta.

Intersecția dintre suportul funcției ψ și suportul distribuției T este compactă și astfel $T\psi$ are sens.

Prin definiție, *distribuția (cu valori în E) dată de formula (4) este convoluția distribuției f cu distribuția T.*

Dacă T este o distribuție scalară, pe care s-o notăm cu g, atunci formula (4) se scrie (cu notațiile utilizate pentru funcționale) sub forma:

$$(4') \qquad <\varphi, f*g> = <\psi, g>.$$

Să presupunem că f și g sînt funcții integrabile pe toată dreapta și să considerăm distribuțiile determinate de aceste funcții.

Cu formula (2) avem în acest caz:

$$\psi(t) = \int_R \varphi(t+\xi)\overline{f(\xi)}\,d\xi$$

și cum $\varphi \in \mathcal{D}$ iar f este integrabilă, rezultă imediat că funcția ψ este cotinuă și mărginită. Are deci sens:

$$<\psi, g> = \int_R \psi(t)\,\overline{g(t)}\,dt,$$

adică are sens $f*g$ în sensul distribuțiilor.

Avem apoi (cu(4')):

$$<\varphi, f*g> = \int_R \left\{\int_R \varphi(t+\xi)\overline{f(\xi)}d\xi\right\}\overline{g(t)}\,dt =$$

$$= \int_R \left\{\int_R \varphi(s)\overline{f(s-t)}\,ds\right\}\overline{g(t)}\,dt = \int_R\int_R \varphi(s)\overline{f(s-t)}\,\overline{g(t)}\,ds dt =$$

$$= \int_R \varphi(s)\left\{\overline{\int_R f(s-t)\,g(t)\,dt}\right\}ds = <\varphi(s), \int_R \overline{f(s-t)\,g(t)\,dt}>,$$

adică $f * g$ este distribuția dată de convoluția obișnuită a funcțiilor f și g.

3. Să considerăm acum două spații Banach, E și F, și spațiul $\mathcal{L}(E, F)$ al aplicațiilor liniare și continue ale lui E și F.

Fie T o distribuție cu valori în E și S o distribuție cu valori în $\mathcal{L}(E, F)$.

Distribuția S, fiind, prin definiție, o aplicație liniară continuă a spațiului $\mathcal{D}$ în $\mathcal{L}(E, F)$, este echivalentă cu o aplicație liniară și continuă a spațiului $\mathcal{D}_E$ în F.

Prin analogie cu secțiunile precedente, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, fix, considerăm funcția cu valori în E,

$$\tau(t) = T(\xi)\,\varphi(t + \xi).$$

La fel ca mai înainte se demonstrează că funcția τ este indefinit derivabilă și că expresia

$$(T * S)\,\varphi = S(\tau)$$

are sens în cazurile similare cu cele de la secțiunea 2 :

a') distribuția T are suportul compact ;

b') distribuția S are suportul compact ;

c') distribuțiile S și T au suporturile mărginite de aceeași parte.

4. Să demonstrăm acum unele proprietăți ale convoluției definite de formula (4).

În primul rînd să observăm că *prin convoluție cu distribuția lui Dirac, o distribuție T rămîne neschimbată* :

$$\delta * T = T. \tag{5}$$

Într-adevăr, dacă în (2) luăm $f = \delta$, atunci

$$\psi(t) = <\varphi(t + \xi), \delta(\xi)> = \varphi(t)$$

și cu (4) obținem

$$(\delta * T)\,\varphi = T\psi = T\varphi,$$

adică are loc (5).

Să arătăm acum că *derivata convoluției este dată de formulele* :

$$(f * T)' = f' * T = f * T'. \tag{6}$$

Într-adevăr, cu definiția convoluției avem :

$$(f * T)' \varphi = -(f * T) \varphi' = -T(t) < \varphi'(t + \xi), f(\xi) > =$$
$$= T(t) < \varphi(t + \xi), f'(\xi) > = (f' * T) \varphi.$$

Pe de altă parte, cu formulele (2) și (4)

$$(f * T)' \varphi = -(f * T) \varphi' = -T \psi' = T' \psi = (f * T') \varphi,$$

deci au loc egalitățile (6).

Din (5) și (6) rezultă de asemenea :

$$T' = \delta' * T, \tag{7}$$

cu alte cuvinte *derivarea este o operație de convoluție.*

Prin inducție se arată că

$$T^{(n)} = \delta^{(n)} * T \tag{8}$$

pentru orice n natural.

O altă operație care se pote obține cu ajutorul convoluției este *translația distribuțiilor.*

Dacă T este o distribuție, translația $\tau_a T$ se definește prin formula

$$(\tau_a T) \varphi = T_t(t) \varphi(t + a).$$

În cazul unei distribuții numerice dată de o funcție local integrabilă $f(t)$ avem

$$< \varphi, \tau_a f > = < \varphi(t + a), f(t) > = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t + a) \overline{f(t)}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \overline{f(t - a)}\, dt = < \varphi(t), f(t - a) >$$

deci

$$(\tau_a f)(t) = f(t - a).$$

Cu alte cuvinte în cazul funcțiilor se obține translația obișnuită.

Se utilizează uneori și pentru distribuții notația $f(t - a)$ în loc de $\tau_a f$.

În cazul distribuției lui Dirac avem

$$\delta(t - a) = \delta_a(t).$$

Într-adevăr,

$$< \varphi, \delta_a > = \varphi(a) = < \varphi(t + a), \delta(t) > = < \varphi(t), \delta(t - a) > .$$

Dacă T este o distribuţie oarecare, atunci

$$\tau_a T = \delta_a * T.$$

Într-adevăr,

$$(\tau_a T)\varphi = T(t)\, \varphi(t - a) = T(t) < \varphi(t + \xi), \delta_a(\xi) > = (\delta_a * T)\, \varphi.$$

5. Dacă spaţiul E coincide cu corpul scalarilor, şi notăm distribuţia T cu g, formula (4) se scrie :

$$< \varphi, f * g > = << \varphi(t + \xi), f(\xi) > g(t) > . \tag{9}$$

Expresia din dreapta formulei (9) poate fi considerată ca restricţia unei formule care defineşte o distribuţie în două variabile şi anume :

$$<< \varphi(t, \xi), f(\xi) >, g(t) > . \tag{10}$$

Această distribuţie se notează cu $f * g$ şi se numeşte produsul direct al distribuţiei f şi g.

Ţinînd seama că orice funcţie de două variabile, indefinit derivabilă şi cu suport compact, este limita unui şir de combinaţii liniare de produse de forma $\varphi_1(t)\varphi_2(\xi)$, expresia (10) este determinată dacă se cunosc valorile

$$<<\varphi_1(t)\, \varphi_2(\xi), f(\xi) >, g(t) > = < \varphi_1, f > < \varphi_2, g > . \tag{11}$$

De aici rezultă că produsul de convoluţie a două distribuţii scalare este comutativ :

$$f * g = g * f \tag{12}$$

şi asociativ :

$$(f * g) * h = f * (g * h). \tag{13}$$

Să presupunem acum că $g_n \to g$ în spaţiul $\mathcal{D}'$ şi că una din următoarele condiţii este verificată :

(i) f este o distribuţie cu suport mărginit ;

(ii) suporturile tuturor distribuţiilor g_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, sînt închise în una şi aceeaşi mulţime mărginită A ;

(iii) suportul lui f precum și suporturile tuturor distribuțiilor g_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, sînt închise în una și aceeași mulțime mărginită la stînga (sau la dreapta) A.

Atunci

$$f * g_n \to f * g$$

în sensul convergenței din spațiul $\mathcal{D}'$.

Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$

$$<\varphi, f * g_n> = << \varphi(t + \xi), f(t) >, g_n(\xi) > .$$

Dacă (i) este verificată, atunci funcția

$$\psi(\xi) = <\varphi(t + \xi), f(t)> \tag{14}$$

este indefinit derivabilă și cu suport compact și avem

$$<\varphi, f * g_n> = <\psi(\xi), g_n(\xi)> \to <\psi, g> = <\varphi, f * g> .$$

Dacă este îndeplinită condiția (ii), atunci funcția $\psi(\xi)$ se înlocuiește printr-o funcție $\psi_1 \in \mathcal{D}$ care să coincidă cu ψ pe mulțimea A. Apoi verificarea se face ca în cazul (i).

În sfîrșit, dacă este îndeplinită condiția (iii), de exemplu cu A mărginită la stînga, atunci funcția $\psi(\xi)$ dată de (14) este cu suport mărginit la dreapta și în acest caz funcția ψ se va înlocui cu o funcție $\psi_1 \in \mathcal{D}$ care să coincidă cu ψ pe mulțimea A.

6. O distribuție (scalară) g cu suport mărginit este «*convolubilă*» adică are următoarele două proprietăți:

a) pentru fiecare $\varphi \in \mathcal{D}$, notînd:

$$\psi(s) = <\varphi(t + s), g(t)>,$$

avem $\psi \in \mathcal{D}$;

b) dacă $\varphi_n \in \mathcal{D}$ și $\varphi_n \to 0$ în spațiul $\mathcal{D}$, atunci și șirul funcțiilor:

$$\psi_n(s) = <\varphi_n(t + s), g(t)>$$

tinde către zero în spațiul $\mathcal{D}$.

Dacă g este o distribuție cu suport mărginit, atunci operatorul V definit prin:

$$V(f) = g * f \tag{15}$$

este un operator liniar și continuu în spațiul $\mathcal{D}'$ al distribuțiilor.

7. Dacă g este o distribuție oarecare în D'^{+}, atunci pentru orice $f \in \mathcal{D}'^{+}$, convoluția $g * f$ are sens și $g * f \in \mathcal{D}'^{+}$.

Deci pentru $g \in \mathcal{D}'^{+}$, operatorul V aplică $\mathcal{D}'^{+}$ în $\mathcal{D}'^{+}$ și este liniar și continuu. El are de asemenea proprietatea de a fi „staționar", adică :

$$V(\tau_a f) = \tau_a V(f).$$

Reciproc, fie V un operator liniar, continuu și staționar, care aplică $\mathcal{D}'^{+}$ în $\mathcal{D}'^{+}$. Să punem

$$g = V(\delta).$$

Avem

$$V(\delta_a) = V(\tau_a \delta) = \tau_a V(\delta) = \tau_a g = g * \delta_a$$

deci (15) are loc pentru $f = \delta_a$.

Dacă

$$f = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta_k , \tag{16}$$

atunci (15) are de asemenea loc, datorită liniarității operatorului.

În sfîrșit, dacă $f \in \mathcal{D}'^{+}$ este oarecare, atunci se poate arăta că există un șir $\{f_n\}$ de distribuții de forma (16) așa că $f = \lim f_n$ în $\mathcal{D}'^{+}$.

Din continuitatea operatorului V rezultă că formula (15) se menține și pentru f oarecare.

Remarcăm, în sfîrșit, că dacă $g \in \mathcal{D}'^{+}$, atunci $V(f)$ are sens pentru orice f cu suport mărginit la stînga și dacă f are suportul pe $[t_0, +\infty]$, atunci $V(f)$ are suportul de asemenea în $[t_0, +\infty]$. Aceasta rezultă din proprietatea de staționaritate a lui V.

§ 4. Familii compozabile de distribuții *)

1. Fie $G = \{g_s\}_{s \in R}$ o familie de distribuții (scalare) care depind de un parametru real **).

Familia G se va zice *compozabilă*, dacă are următoarele două proprietăți :

(i) pentru fiecare $\varphi \in \mathcal{D}$, notînd

$$\psi(s) = \langle \varphi(t), g_s(t) \rangle \tag{1}$$

avem $\psi \in \mathcal{D}$;

*) Familiile compozabile de distribuții au fost introduse de R. Cristescu în [7].

**) Mai general putem considera cazul cînd $s \in R^n$.

(ii) dacă $\varphi_n \in \mathcal{D}$ și $\varphi_n \to 0$ în spațiul $\mathcal{D}$, atunci și șirul funcțiilor

$$\psi_n(s) = < \varphi_n(t), g_s(t) >$$

tinde către zero în spațiul $\mathcal{D}$.

Dacă G este compozabilă, atunci petru orice $f \in \mathcal{D}'$, vom introduce o operație de compunere *)

$$h = G \circ f$$

prin condiția

$$<\varphi, h> = <\psi, f>,$$

unde ψ este dată de (1); deci

$$<\varphi, G \circ f> = <<\varphi(t), g_s(t)>, f(s)>. \tag{2}$$

2. Să stabilim proprietățile operației de compunere dată de formula (2).

1) *Dacă g este o distribuție iar $G = \{\tau_s g\}_{s \in R}$, atunci familia G este compozabilă, dacă și numai dacă distribuția g este convolubilă.* În acest caz

$$G \circ f = g * f. \tag{3}$$

Într-adevăr, dacă $g_s = \tau_s g$, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\psi(s) = <\varphi, g_s> = <\varphi, \tau_s g> = <\varphi(t+s), g(t)>, \tag{4}$$

de unde rezultă imediat prima parte a propoziției.

Dacă g este convolubilă, atunci cu (4) rezultă că pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ și oricare ar fi $f \in \mathcal{D}'$ avem

$$<\varphi, G \circ f> = <\psi, f> = <<\varphi(t+s), g(t)>, f(s)> =$$
$$= <\varphi, g * f>$$

de unde rezultă (3).

2) *Dacă $\Delta = \{\delta_s\}_{s \in R}$, atunci Δ este compozabilă și avem*

$$\Delta \circ f = f$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{D}'$.

Această propoziție rezultă direct din precedenta.

---

*) Mai general putem considera cazul cînd f este distribuție vectorială.

3) *Dacă G este o familie compozabilă de distribuții, atunci pentru orice $s \in R$,*

$$G \circ \delta_s = g_s . \tag{5}$$

Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ avem

$$< \varphi, G \circ \delta_s > = << \varphi(t), g_\sigma (t) >, \delta_s (\sigma) > = < \varphi (t), g_s (t) >$$

de unde rezultă (5).

4) *Dacă $E = \{e_s\}_{s \in R}$ și $F = \{f_s\}_{s \in R}$ sînt familii compozabile de distribuții, atunci: $G = \{E \circ f_s\}_{s \in R}$ este compozabilă și pentru orice distribuție f are loc egalitatea*

$$E \circ (F \circ f) = \{E \circ f_s\}_{s \in R} \circ f. \tag{6}$$

Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ avem

$$\psi(s) = < \varphi, g_s > = < \varphi, E \circ f_s > =$$

$$= << \varphi(t), e_\sigma (t) >, f_s (\sigma) > = < \chi (\sigma), f_s (\sigma) >,$$

unde

$$\chi(\sigma) = < \varphi(t), e_\sigma (t) > .$$

Deoarece E este compozabilă, $\chi \in \mathcal{D}$; de asemenea, din $\varphi_n \to 0$ (în $\mathcal{D}$) rezultă $\chi_n \to 0$ (în $\mathcal{D}$), unde

$$\chi_n (\sigma) = < \varphi_n (t), e_\sigma (t) > .$$

Familia F fiind de asemenea compozabilă, iar

$$\psi (s) = < \chi (\sigma), f_s (\sigma) >,$$

din $\chi \in \mathcal{D}$ rezultă $\psi \in \mathcal{D}$, iar din $\chi_n \to 0$ (în $\mathcal{D}$) rezultă $\psi_n \to 0$ (în $\mathcal{D}$), unde

$$\psi_n (s) = < \chi_n (\sigma), f_s (\sigma) > .$$

Deci G este compozabilă.

Notînd $g = F \circ f$, avem

$$< \varphi, E \circ g > = << \varphi (t), e_\sigma (t) >, g (\sigma) > = < \chi (\sigma), g(\sigma) > =$$

$$= < \chi (\sigma), (F \circ f) (\sigma) > = << \chi (\sigma), f_s (\sigma) >, f (s) > =$$

$$= < \psi (s), f (s) > = << \varphi (t), g_s (t) >, f (s) > = < \varphi, G \circ f >$$

deci

$$E \circ g = G \circ f,$$

egalitate echivalentă cu (6).

5) *Operatorul*

$$W(f) = G \circ f$$

generat de o familie compozabilă de distribuții este liniar și continuu în spațiul $\mathcal{D}'$.

Într-adevăr, dacă $f_1 f_2 \in \mathcal{D}'$, atunci

$$<\varphi, G \circ (f_1 + f_2)> = <<\varphi, g_s>, f_1 + f_2> = <<<\varphi, g_s>, f_1> +$$
$$+ <<\varphi, g_s>, f_2> = <\varphi, G \circ f_1> + <\varphi, G \circ f_2> =$$
$$= <\varphi, G \circ f_1 + G \circ f_2>$$

de unde rezultă

$$G \circ (f_1 + f_2) = (G \circ f_1) + (G \circ f_2).$$

Fie acum $f_n \to f$ în $\mathcal{D}'$. Aceasta înseamnă:

$$<\psi, f_n> - <\psi, f>$$

oricare ar fi $\psi \in \mathcal{D}$. În particular, pentru

$$\psi(s) = <\varphi(t), g_s(t)>$$

rezultă

$$<<\varphi, g_s>, f_n> \to <<\varphi, g_s>, f>$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$. Deci

$$G \circ f_n \to G \circ f.$$

6) *Dacă* $G = \{g_s\}_{s \in R}$ *este compozabilă, atunci pentru orice operator diferențial liniar* A *de forma:*

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) D^{n-k}$$

(unde $a_k(t)$ *sînt funcții indefinit derivabile) familia*

$$AG = \{Ag_s\}_{s \in R}$$

este compozabilă și pentru orice $f \in \mathcal{D}'$:

$$A(G \circ f) = (AG) \circ f.$$

Într-adevăr, să observăm mai întîi că dacă G este compozabilă, atunci și familia

$$DG = \{Dg_s\}_{s\in R}$$

este compozabilă, deoarece

$$< \varphi, Dg_s > = < -\varphi', g_s > .$$

Punînd $h = G \circ f$ avem

$$< \varphi, Dh > = < -\varphi', h > = << -\varphi', g_s >, f > =$$
$$= << \varphi, Dg_s >, f > = < \varphi, (DG) \circ f >$$

de unde

$$D(G \circ f) = (DG) \circ f.$$

Prin inducție putem arăta că pentru orice număr natural k, familia $D^k G$ este compozabilă și

$$D^k (G \circ f) = (D^k G) \circ f. \tag{7}$$

Se verifică de asemenea că dacă G este compozabilă, iar $a(t)$ este o funcție indefinit derivabilă, atunci familia

$$a(t)\, G = \{a(t)\, g_s\}_{s\in R}$$

este compozabilă.

Deci dacă G este compozabilă, atunci și familia $a_k(t)\, D^{n-k} G$ este compozabilă. Dar atunci și

$$AG = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, D^{n-k} G$$

este compozabilă.

Să observăm că dacă G este compozabilă, iar $a(t)$ este o funcție indefinit derivabilă, atunci

$$a(t)\,(G \circ f) = (a(t)\, G) \circ f. \tag{8}$$

Într-adevăr,

$$< \varphi(t), a(t)\,(G \circ f)(t) > = < a(t)\, \varphi(t), G \circ f > =$$
$$= << a(t)\, \varphi(t), g_s(t) >, f(s) > = << \varphi(t), a(t)\, g_s(t) >, f(s) > =$$
$$= < \varphi, (a(t)\, G) \circ f > .$$

Deci

$$a_k(t)\, D^{n-k}\, G \circ f) = (a_k(t)\, D^{n-k}\, G) \circ f.$$

Cu (7) și (8) rezultă

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, D^{n-k}\, (G \circ f) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, D^{n-k}\, G \right) \circ f$$

și propoziția este demonstrată.

În cazul particular al convoluției se poate enunța următoarea propoziție:

Dacă g este o distribuție cu suport mărginit, atunci pentru orice operator diferențial liniar cu coeficienți constanți:

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k}$$

și pentru orice $f \in \mathcal{D}'$:

$$A(g * f) = (Ag) * f.$$

3. Condițiile (i) și (ii) din definiția familiei compozabile asigură existența distribuției $h = G \circ f$ pentru orice $f \in \mathcal{D}'$. Aceste condiții pot fi slăbite dacă nu cerem ca $G \circ f$ să existe decît pentru anumite tipuri de distribuții.

O familie $G = \{g_s\}_{s \in R}$ de distribuții se va numi o *familie normală*, dacă pentru orice $s \in R$, distribuția g_s are suportul pe semidreapta $[s, +\infty)$. Astfel de distribuții intervin în unele aplicații.

Dacă G este o familie normală, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, suportul funcției $\psi(s) = < \varphi, w_s >$ este mărginit la stînga, după cum este ușor de verificat.

Fie $G = \{g_s\}_{s \in R}$ o familie normală de distribuții care are proprietățile:

(i′) pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, funcția $\psi(s) = < \varphi, w_s >$ este indefinit derivabilă;

(ii′) dacă $\varphi_n \in \mathcal{D}$ și $\varphi_n \to 0$ (în $\mathcal{D}$), atunci funcțiile $\psi_n(s) = < \varphi_n, w_s >$, precum și derivatele lor de orice ordin, tind către zero, uniform pe orice segment.

În acest caz pentru orice distribuție f cu suport mărginit la stînga, sensul lui $< \psi, f >$ va fi dat de egalitatea $< \psi, f > =$

$= <\psi_1, f>$, unde $\psi_1 \in \mathcal{D}$ și $\psi_1(s) = \psi(s)$ pe intersecția suporturilor lui f și ψ; cînd intersecția este vidă, se va lua

$$<\psi, f> = 0.$$

Deci dacă G este normală iar f are suport mărginit la stînga, atunci $G \circ f$ are sens.

În unele aplicații intervin și distribuții mai particulare.

Fie G o familie normală de distribuții avînd proprietățile următoare:

(i'') pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, funcția $\psi(s) = <\varphi, g_s>$ are derivate continue pînă la ordinul k;

(ii'') dacă $\varphi_n \in \mathcal{D}$ și $\varphi_n \to 0$ (în $\mathcal{D}$), atunci funcțiile $\psi_n(s) = <\varphi_n, g_s>$ precum și derivatele lui $\psi_n(s)$ pînă la ordinul k, tind la zero uniform pe orice segment.

În acest caz, dacă f este o distribuție de ordinul k, adică definită pe $C_0^{(k)}$ (a se vedea Cap. I, § 4, secțiunea 8), atunci $G \circ f$ are sens.

§ 5. Transformarea Fourier

1. Transformarea Fourier a unei distribuții se definește prin transpunerea trnsformării Fourier a elementelor din spațiul $\mathcal{D}$. În acest caz este însă necesară introducerea unui nou spațiu de funcții, deoarece transformata Fourier a unei funcții cu suport compact nu este, în general, o funcție cu suport compact.

Fie φ un element din spațiul $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R)$ și să punem:

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

unde $s = \sigma + i\tau$ este o variabilă complexă.

Funcția $\tilde{\varphi}$ este definită și olomorfă în tot planul complex (cu excepția punctului de la infinit). Această funcție o numim transformata Fourier a funcției φ și o scriem:

$$\tilde{\varphi} = \mathcal{F}\varphi. \tag{2}$$

Dacă se consideră toate funcțiile $\varphi \in \mathcal{D}$ cu suportul inclus în segmentul $[-m, m]$, atunci mulțimea tuturor funcțiilor

$\mathcal{F}\varphi$ formează un spațiu vectorial $\mathcal{Z}_m$, ale cărui elemente φ satisfac inegalitățile :

$$(3) \qquad |s^q \widetilde{\varphi}(s)| \leqslant C_q e^{-m|\tau|}, \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Reuniunea tuturor spațiilor $\mathcal{Z}_m$, adică mulțimea tuturor elementelor de forma (2) cu $\varphi \in \mathcal{D}$, se va nota prin $\mathcal{Z}$.

Se poate demonstra că formula (1) stabilește o corespondență liniară biunivocă între spațiile $\mathcal{D}$ și $\mathcal{Z}$.

Inversa transformării $\mathcal{F}$ este transformarea $\mathcal{F}^{-1}$ dată de formula :

$$(4) \qquad \varphi(t) = (\mathcal{F}^{-1}\widetilde{\varphi})(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma t}\widetilde{\varphi}(\sigma)\,d\sigma.$$

În spațiul $\mathcal{Z}$ introducem următoarea relație de convergență : șirul $\{\widetilde{\varphi}_n\}$ de elemente din $\mathcal{Z}$ converge către 0 dacă

$$|s^q \widetilde{\varphi}_n(s)| \leqslant C_q e^{-m|\tau|}, \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots),$$

unde m și C_q nu depind de n, iar șirul funcțiilor $\widetilde{\varphi}_n(\sigma)$ converge uniform către 0 pe orice segment al axei reale.

Se demonstrează că dacă $\mathcal{Z}$ este înzestrat cu această relație de convergență, atunci operatorii $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}^{-1}$ sînt continui.

Vom nota prin $\mathcal{Z}'$ mulțimea funcționalelor liniare și continue definite pe spațiul $\mathcal{Z}$.

Mulțimea aplicațiilor liniare și continue ale spațiului $\mathcal{Z}$ într-un spațiu Banach E va fi notat prin $\mathcal{Z}'_E$.

În mulțimea $\mathcal{Z}'$ se pot considera două feluri de funcționale definite de funcții.

O *funcțională regulată* definită de o funcție g, este dată de formula

$$<\psi, g> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\overline{g}(\sigma)\,d\sigma.$$

O *funcțională analitică* definită de o funcție g, este dată de formula

$$<\psi, g> = \int_{\Gamma} \psi(s)\,g(s)\,ds,$$

unde Γ este un anumit contur.

În $\mathscr{Z}'$ se poate considera *funcționala lui Dirac* definită prin formula

$$< \psi, \delta_a > = \psi(a),$$

unde a este un număr complex oarecare. Această distribuție este o funcțională analitică, fiind definită de funcția

$$g_a(s) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{s - a},$$

Într-adevăr, cu formula lui Cauchy

$$\psi(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi(s)}{s - a} ds,$$

unde Γ este un contur care conține în interior punctul a.

Se observă imediat că

$$\overline{(s - a)}\, \delta_a = 0.$$

Pentru $a = 0$, notăm $\delta_0 = \delta$.

Avem deci

$$< \psi, \delta > = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi(s)}{s} ds,$$

unde Γ poate fi luat, de exemplu, circumferința $|s| = 1$.

Funcționala δ verifică ecuația

$$\bar{s}\delta = 0,$$

Pentru a obține o soluție a ecuației

$$\bar{s}g = 1,$$

vom considera funcționala g_1 definită de formula

$$< \psi, g_1 > = \int_{\Gamma_a} \frac{\psi(s)}{s} ds,$$

unde Γ_a este o dreaptă paralelă cu axa reală, la distanța $a > 0$ de această axă.

Înlocuind Γ_a prin Γ_{-a}, obținem o altă soluție g_2 și avem

$$g_2 - g_1 = 2\pi i\, \delta.$$

Într-adevăr :

$$< \psi, g_2 - g_1 > = \int_{|s|=1} \frac{\psi(s)}{s}\, ds = 2\pi i\, \psi(0) = 2\pi i < \psi, \delta > .$$

2. Fie T un element din $\mathcal{D}'_E$. Elementul $\widetilde{T} \in \mathcal{Z}'_E$ definit de relația

$$\widetilde{T}\widetilde{\varphi} = 2\pi T\varphi, \qquad (\widetilde{\varphi} \in \mathcal{Z},\ \varphi = \mathcal{F}^{-1}\widetilde{\varphi}) \tag{5}$$

se numește *transformarea Fourier* a distribuției $\widetilde{T}$.

Se utilizează și notația $\mathcal{F}\widetilde{T}$ pentru T.

Transformarea inversă $\mathcal{F}^{-1}$ definită pe $\mathcal{Z}'_E$ cu valori în $\mathcal{D}'_E$ va fi dată de formula

$$(\mathcal{F}^{-1} V)\,\varphi = \frac{1}{2\pi} V\widetilde{\varphi}, \qquad (V \in \mathcal{Z}'_E). \tag{6}$$

Egalitățile :

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\, T) = T\ , \qquad (T \in \mathcal{D}'_E) \tag{7}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\, V) = V\ , \qquad (V \in \mathcal{Z}'_E) \tag{8}$$

se verifică ușor.

De exemplu, pentru orice $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{Z}$ avem cu (5) și (6) :

$$(\mathcal{F}\,(\mathcal{F}^{-}V))\,\widetilde{\varphi} = \widetilde{\mathcal{F}^{-1}\, V\widetilde{\varphi}} = 2\pi\,(\mathcal{F}^{-1}\, V)\,\widetilde{\varphi} = V\widetilde{\varphi}$$

de unde rezultă (8).

Dacă T este o distribuție scalară f, atunci formula (5) devine

$$< \widetilde{\varphi}, \widetilde{f} > = 2\pi < \varphi, f > . \tag{9}$$

În cazul cînd f este o distribuție dată de o funcție integrabilă pe toată axa reală, formula (9) este verificată și este cunoscută sub numele de formula lui Parseval. În acest caz, transformarea Fourier se definește prin aceeași formulă ca pentru elementele din $\mathcal{D}'$:

$$\widetilde{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} f(t)\, dt \tag{10}$$

iar din (1) și (10) rezultă :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\sigma)\, \overline{\widetilde{f}}(\sigma)\, d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \overline{f(t)}\, dt.$$

Într-adevăr :

$$< \psi, g_2 - g_1 > = \int_{|s|=1} \frac{\psi(s)}{s}\, ds = 2\pi i\, \psi(0) = 2\pi i < \psi, \delta > .$$

2. Fie T un element din $\mathcal{D}'_E$. Elementul $\widetilde{T} \in \mathcal{Z}'_E$ definit de relația

$$\widetilde{T}\widetilde{\varphi} = 2\pi\, T\varphi, \qquad (\widetilde{\varphi} \in \mathcal{Z},\ \varphi = \mathcal{F}^{-1}\widetilde{\varphi}) \tag{5}$$

se numește *transformarea Fourier* a distribuției $\widetilde{T}$.

Se utilizează și notația $\mathcal{F}\widetilde{T}$ pentru T.

Transformarea inversă $\mathcal{F}^{-1}$ definită pe $\mathcal{Z}'_E$ cu valori în $\mathcal{D}'_E$ va fi dată de formula

$$(\mathcal{F}^{-1} V)\,\varphi = \frac{1}{2\pi} V\widetilde{\varphi}, \qquad (V \in \mathcal{Z}'_E). \tag{6}$$

Egalitățile :

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\, T) = T \quad , \qquad (T \in \mathcal{D}'_E) \tag{7}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\, V) = V \quad , \qquad (V \in \mathcal{Z}'_E) \tag{8}$$

se verifică ușor.

De exemplu, pentru orice $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{Z}$ avem cu (5) și (6) :

$$(\mathcal{F}\,(\mathcal{F}^{-}V))\,\widetilde{\varphi} = \widetilde{\mathcal{F}^{-1}\, V\widetilde{\varphi}} = 2\pi\,(\mathcal{F}^{-1}\, V)\,\widetilde{\varphi} = V\widetilde{\varphi}$$

de unde rezultă (8).

Dacă T este o distribuție scalară f, atunci formula (5) devine

$$< \widetilde{\varphi}, \widetilde{f} > = 2\pi < \varphi, f > . \tag{9}$$

În cazul cînd f este o distribuție dată de o funcție integrabilă pe toată axa reală, formula (9) este verificată și este cunoscută sub numele de formula lui Parseval. În acest caz, transformarea Fourier se definește prin aceeași formulă ca pentru elementele din $\mathcal{D}'$:

$$\widetilde{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} f(t)\, dt \tag{10}$$

iar din (1) și (10) rezultă :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\sigma)\, \overline{\widetilde{f}}(\sigma)\, d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \overline{f(t)}\, dt.$$

Într-adevăr :

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,(t)\,\overline{f(t)}\,dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sigma t}\,\widetilde{\varphi}(\sigma)\,d\sigma\right)\overline{f(t)}\,dt =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(\sigma)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sigma t}\,\overline{f(t)}\,dt\right)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(\sigma)\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma t}\,f(t)\,dt}\right)d\sigma =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(\sigma)\,\overline{\widetilde{f}}(\sigma)\,d\sigma$$

inversarea integralei repetate fiind posibilă datorită convergenței integralei duble :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{\varphi}(\sigma)|\,|\overline{f(t)}|\,d\sigma\,dt.$$

Același calcul ne arată că din (9) rezultă (10).

3. În cazul unei distribuții scalare f cu suport mărginit, transformata sa Fourier $\widetilde{f}$ este o funcțională regulată dată de funcția :

$$f_0(\sigma) = <e^{i\sigma t},\ \overline{f(t)}>. \tag{11}$$

Precizăm că în membrul al doilea se înțelege că :

$$<e^{i\sigma t},\ \overline{f(t)}> = <\varphi(t), \overline{f(t)}>,$$

unde $\varphi\in\mathcal{D}$ și $\varphi(t) = e^{i\sigma t}$ pe suportul lui f.

Pentru a demonstra că $\widetilde{f}$ este echivalentă cu funcția $f_0(\sigma)$ dată de formula (11) trebuie să arătăm că pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}$:

$$\int\overline{<e^{i\sigma t},\ \overline{f(t)}>}\,\widetilde{\varphi}(\sigma)\,d\sigma = 2\pi<\varphi, f>. \tag{12}$$

Avem

$$<\varphi,\ f> = <\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\sigma t}\,\widetilde{\varphi}(\sigma)\,d\sigma, f> =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int<e^{-i\sigma t},\ f(t)>\widetilde{\varphi}(\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\overline{<e^{i\sigma t},\ \overline{f(t)}>}\,\widetilde{\varphi}(\sigma)\,d\sigma,$$

deci (11) are loc.

Fie acum f o distribuție (scalară) oarecare.

Există atunci un șir $\{f_n\}_{n\in N}$ de distribuții cu suport mărginit care converge către f în sensul convergenței din spațiul $\mathcal{D}'$. Dacă $f_{0n}(s)$ este funcția echivalentă cu $\tilde{f}_n$, atunci

$$\tilde{f} = \lim f_{0n}$$

în sensul convergenței din spațiul $\mathcal{Z}'$.

Dacă f este o funcție, atunci transformata Fourier $\tilde{f}$ a acestei funcții va fi limita în sensul convergenței din spațiul $\mathcal{Z}'$ a șirului funcțiilor:

$$f_{0n}(\sigma) = \int_{-n}^{n} e^{i\sigma t} f(t)\, dt.$$

4. Vom arăta acum cum se calculează transformata Fourier a unei convoluții.

Fie $h \in \mathcal{Z}'$ și să presupunem că h este o funcțională regulată definită de o funcție $h(\sigma)$. Vom presupune că $h(\sigma)$ este un „multiplicator'' în spațiul $\mathcal{Z}$, adică $h\,\psi \in \mathcal{Z}$ oricare ar fi $\psi \in \mathcal{Z}$. Aceasta înseamnă că $h(s)$ este o funcție analitică întreagă pentru care există numerele α, β, γ, așa ca

$$|h(s)| \leqslant \gamma e^{\beta|\tau|}(1 + |s|)^{\alpha},$$

unde $s = \sigma + i\tau$.

În acest caz distribuția $g = \mathcal{F}^{-1} h$ este convolubilă în $\mathcal{D}'$ și are loc egalitatea

$$F(g * f) = F(g) \cdot F(f) \tag{13}$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{D}'$.

Pentru demonstrație să observăm mai întîi că pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\mathcal{F}[\varphi(t - \xi)](\sigma) = e^{i\xi\sigma}\tilde{\varphi}(\sigma). \tag{14}$$

Într-adevăr,

$$\mathcal{F}[\varphi(t - \xi)](\sigma) = \int e^{i\sigma t}\, \varphi(t - \xi)\, dt = \int e^{i\sigma(\xi + u)}\, \varphi(u)\, du =$$

$$= e^{i\sigma\xi} \int e^{i\sigma u}\, \varphi(u)\, du = e^{i\sigma\xi}\, \tilde{\varphi}(\sigma).$$

Să arătăm acum că distribuția $g = \mathcal{F}^{-1} h$ este convolubilă. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ avem, cu formulele (9) și (14),

$$< \varphi(t + \xi), g(\xi) > = \frac{1}{2\pi} < e^{i\sigma t} \tilde{\varphi}(\sigma), h(\sigma) > =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\sigma t} \overline{h(\sigma)}\, \tilde{\varphi}(\sigma)\, d\sigma = \mathcal{F}^{-1}(\bar{h}\, \tilde{\varphi}).$$

Cum $\bar{h}\tilde{\varphi} \in \mathcal{Z}$, rezultă $\mathcal{F}^{-1}(\bar{h}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{D}$, deci funcția

$$\psi(t) = < \varphi(t + \xi), g(\xi) >$$

aparține lui $\mathcal{D}$.

Dacă $\varphi_n \to 0$ în spațiul $\mathcal{D}$, atunci $\tilde{\varphi}_n \to 0$ în spațiul $\mathcal{Z}$ și deci $h\tilde{\varphi}_n \to 0$ în $\mathcal{Z}$, de unde rezultă $\mathcal{F}^{-1}(\bar{h}\tilde{\varphi}) \to 0$ în spațiul $\mathcal{D}$. Am arătat astfel că distribuția g este convolubilă în spațiul $\mathcal{D}'$.

În plus am văzut că

$$\tilde{\psi} = \bar{h}\tilde{\varphi}.$$

În sfîrșit, oricare ar fi distribuția $f \in \mathcal{D}$ avem

$$< \tilde{\varphi}, \mathcal{F}(g * f) > = 2\pi < \varphi, g * f > = 2\pi < \psi, f > =$$

$$= < \tilde{\psi}, \tilde{f} > = < \bar{h}\, \tilde{\varphi}, \tilde{f} > = < \tilde{\varphi}, h\tilde{f} > = < \tilde{\varphi}, \tilde{g}\, \tilde{f} >$$

de unde rezută egalitatea (13).

Se poate de asemenea arăta că dacă distribuția $g \in \mathcal{D}'$ *este cu suport mărginit, atunci* $\tilde{g}$ *este un multiplicator în spațiul* $\mathcal{Z}$ *și are loc egalitatea* (13).

Pentru aceasta se arată mai întîi că dacă $\varphi \in \mathcal{D}$, atunci pentru funcția

$$\psi(t) = < \varphi(t + \xi), g(\xi) >$$

are loc egalitatea

$$\tilde{\psi} = \bar{\tilde{g}} \cdot \tilde{\varphi}.$$

Dacă f este o distribuție (scalară) oarecare, atunci

$$< \tilde{\varphi}, \overline{g * f} > = 2\pi < \varphi, g * f > = 2\pi < < \varphi(t +$$

$$+ \xi), g(\xi) >, f(t) > = 2\pi < \psi, f > =$$

$$= < \tilde{\psi}, \tilde{f} > = < \bar{\tilde{g}} \cdot \tilde{\varphi}, \tilde{f} > = < \tilde{\varphi}, \tilde{g}\, \tilde{f} >$$

de unde rezultă (13).

Scanned with OKEN Scanner

5. Vom da acum alte proprietăți ale transformării Fourier legate de diferite operații aplicate distribuțiilor.

Dacă $P(t)$ este un polinom oarecare cu coeficienți constanți, atunci pentru orice $f \in \mathcal{D}'$ au loc egalitățile :

$$\widetilde{P(D)f} = \widetilde{P(\mathrm{i}t)f}, \tag{15}$$

$$\widetilde{P(D)f} = P(-\mathrm{i}s)\,\tilde{f}. \tag{16}$$

Vom stabili numai egalitatea (15), deoarece (16) se stabilește în mod asemănător.

Pentru a stabili (15) este suficient a considera cazul $P(t) = t$, adică să arătăm că :

$$D\tilde{f} = \widetilde{itf}. \tag{17}$$

Pentru aceasta vom observa mai întîi că

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(s)}{\mathrm{d}s} = \int_{-\infty}^{+\infty} it\,\mathrm{e}^{ist}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \widetilde{it\varphi(t)}.$$

Avem apoi

$$<\tilde{\varphi}, \widetilde{itf}> = 2\pi <\varphi, itf> = 2\pi <-it\varphi, f> =$$

$$= <-\widetilde{it\varphi}, \tilde{f}> = <-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{\varphi}, \tilde{f}> = <\tilde{\varphi}, D\tilde{f}>$$

de unde rezultă (17).

6. *Dacă $g = \mathcal{F}(f)$, atunci*

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at} f(t)) = g(s-a). \tag{18}$$

Într-adevăr, deoarece funcția $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}$ este indefinit derivabilă, avem

$$<\varphi(t), \mathrm{e}^{-\mathrm{i}at} f(t)> = <\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\varphi(t), f(t)>. \tag{19}$$

Dar

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(s+a)t}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{\varphi}(s+a).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$<\widetilde{\varphi}, \mathcal{F}(e^{iat} f(t))> = 2\pi <\varphi(t), e^{-iat} f(t)> =$$
$$= 2\pi <e^{iat}\varphi(t), f(t)> = <\widetilde{\varphi}(s+a), \widetilde{f}(s) =$$
$$= <\widetilde{\varphi}(s), \widetilde{f}(s-a)>$$

de unde rezultă (18).

7. *Dacă* $g = \mathcal{F}(f)$, *atunci*

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{ias} g(s). \tag{20}$$

Într-adevăr, avem

$$<\varphi(t), f(t-a)> = <\varphi(t+a), f(t)>$$

și:

$$\mathcal{F}(\varphi(t+a)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\varphi(t+a)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(u-a)}\varphi(u)\,du = e^{ias}\mathcal{F}[\varphi(t)].$$

Ținînd seama că e^{-ias} este un multiplicator în spațiul $\mathcal{Z}$, putem scrie

$$<\widetilde{\varphi}, \mathcal{F}(f(t-a))> = 2\pi <\varphi(t), f(t-a)> =$$
$$= 2\pi <\varphi(t+a), f(t)> = <e^{-ias}\widetilde{\varphi}(s), g(s)> =$$
$$= <\widetilde{\varphi}(s), e^{ias} g(s)>$$

de unde rezultă (20).

Din (20) rezultă în particular:

$$\mathcal{F}(\delta(t-a)) = e^{ias}.$$

8. Pentru orice distribuție $f \in \mathcal{D}'$ are loc egalitatea

$$\widetilde{\overline{f}}(s) = \overline{\widetilde{f}}(-s). \tag{21}$$

Într-adevăr, avem

$$<\varphi, \overline{f}> = \overline{<\overline{\varphi}, f>}$$

şi

$$\tilde{\bar{\varphi}}(s) = \int e^{ist}\,\overline{\varphi(t)}\,dt = \overline{\int e^{-ist}\,\varphi(t)\,dt} = \bar{\tilde{\varphi}}(-s).$$

Deci :

$$<\tilde{\varphi}, \bar{\tilde{f}}> = 2\pi <\varphi, \bar{f}> = 2\pi\,\overline{<\bar{\varphi}, f>} = \overline{<\bar{\tilde{\varphi}}, \tilde{f}>} =$$
$$= \overline{<\bar{\tilde{\varphi}}(-s), \tilde{f}(s)>} = \overline{<\bar{\tilde{\varphi}}(s), \tilde{f}(-s)>} =$$
$$= <\tilde{\varphi}(s), \bar{\tilde{f}}(-s)>$$

de unde rezultă (21).

9. Vom calcula acum transformatele Fourier ale unor funcţii şi distribuţii.

Vom stabili mai întîi următoarele egalităţi :

(22) $$\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta$$

(23) $$\mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k\right) = 2\pi \sum_{k=0}^{n} (-i)^k \alpha_k \delta^{(k)},$$

(24) $$\mathcal{F}(e^{\alpha t}) = 2\pi\delta(s - i\alpha),$$

(25) $$\mathcal{F}(\sin \alpha t) = i\pi[\delta(s + \alpha) - \delta(s + \alpha)],$$

(26) $$\mathcal{F}(\cos \alpha t) = \pi[\delta(s - \alpha) + \delta(s + \alpha)].$$

Avem

$$<\tilde{\varphi}, \mathcal{F}(1)> = 2\pi <\varphi, 1> = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = 2\pi\tilde{\varphi}(0) =$$
$$= 2\pi <\tilde{\varphi}, \delta> = <\tilde{\varphi}, 2\pi\delta>,$$

de unde rezultă (22).

Pentru a stabili (23) vom folosi egalitatea (15).

Avem

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k\right) = \mathcal{F}\left[\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k\right) \cdot 1\right] = \left[\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (-i D)^k\right] \mathcal{F}(1) =$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (-1)^k D^k\right] (2\pi\delta) = 2\pi \sum_{k=0}^{n} (-i)^k \alpha_k \delta^{(k)}$$

deci are loc (23).

Pentru a stabili (24) vom folosi dezvoltarea :

$$e^{\alpha t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n, \tag{27}$$

seria fiind convergentă în spațiul $\mathcal{D}$;

$$\delta(s+v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} \delta^{(n)}(s). \tag{28}$$

Această egalitate este un caz particular al egalității :

$$g(s+v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} g^{(n)}(s), \tag{29}$$

care are loc pentru orice $g \in \mathcal{Z}'$, convergența seriei avînd loc de asemenea în spațiul $\mathcal{Z}'$.

Să stabilim egalitatea (29).

Pentru orice $\psi \in \mathcal{Z}$ avem

$$< \psi(s), \frac{v^n}{n!} g^{(n)}(s) > = < \frac{(-1)^n v^n}{n!} \psi^{(n)}(s), g(s) > .$$

Pe de altă parte,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n v^n}{n!} \psi^{(n)}(s) = \psi(s-v),$$

convergența avînd loc în spațiul $\mathcal{Z}$.

Rezultă

$$< \psi(s), \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} g^{(n)}(s) > = < \psi(s-v), g(s) > = < \psi(s), g(s+v) >$$

deci are loc (29).

Cu (27), (23) și (28) rezultă

$$\mathcal{F}(e^{\alpha t}) = \mathcal{F}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \mathcal{F}(t^n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} 2\pi (-i)^n \delta^{(n)}(s) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^n}{n!} \delta^{(n)}(s) = 2\pi \delta(s - i\alpha)$$

deci are loc (24).

Din

$$\sin \alpha t = \frac{1}{2i}(e^{\alpha t i} - e^{-\alpha t i})$$

rezultă cu (24):

$$\mathcal{F}(\sin \alpha t) = \frac{1}{2i}[\mathcal{F}(e^{\alpha t i}) - \mathcal{F}(e^{-\alpha t i})] = \frac{1}{2i}[2\pi\delta(s+\alpha) -$$

$$- 2\pi\delta(s-\alpha)] = \pi i[\delta(s-\alpha) - \delta(s+\alpha)],$$

deci are loc (25).

În sfîrșit, din

$$\cos \alpha t = \frac{1}{2}(e^{\alpha t i} + e^{-\alpha t i})$$

rezultă cu (24):

$$\mathcal{F}(\cos \alpha t) = \frac{1}{2}[\mathcal{F}(e^{\alpha t i}) + \mathcal{F}(e^{-\alpha t i})] =$$

$$= \pi(\delta(s+\alpha) + \delta(s-\alpha)]$$

adică (26).

Vom stabili acum formulele:

(30) $$\mathcal{F}(\delta) = 1,$$

(31) $$\mathcal{F}[P(D)\delta] = P(-is),$$

unde $P(t)$ este un polinom.

Prima din ele rezultă din egalitățile:

$$<\tilde{\varphi}, \tilde{\delta}> = 2\pi <\varphi, \delta> = 2\pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(s)\,ds = <\tilde{\varphi}, 1>.$$

Pentru a doua folosim (16) și (30):

$$\mathcal{F}[P(D)\delta] = P(-is)\,\tilde{\delta} = P(-is).$$

Se pot stabili și următoarele formule:

$$\mathcal{F}(t^n) = 2(-i)^n \pi \delta^{(n)}(\sigma),$$

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{t}\right) = i\pi\,\mathrm{sgn}\,\sigma,$$

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{i}{\sigma} + \pi\delta(\sigma),$$

unde n este un număr oarecare, iar θ este funcția lui Heaviside.

Se verifică de asemenea că orice funcțională analitică definită de o funcție g, adică dată de formula

$$< \psi, g > = \int_\Gamma \psi(s)\, g(s)\, ds, \qquad (\psi \in \mathcal{Z})$$

este transformata Fourier a distribuției regulate definită de funcția :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \overline{\int_\Gamma e^{ist}\, g(s)\, ds}.$$

10. Se poate introduce transformarea Fourier și pentru distribuții pe $\mathcal{D}(R^m)$.

Dacă $\varphi \in \mathcal{D}(R^m)$, atunci transformata Fourier $\tilde{\varphi}$ a lui φ este dată de formula

$$\tilde{\varphi}(s_1, s_2, \ldots, s_m) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_m t_m)}\, \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_m,$$

unde $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sînt variabile complexe.

Notăm tot cu $\mathcal{Z}$ spațiul funcțiilor $\psi(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ care sînt transformate Fourier ale funcțiilor $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ din $\mathcal{D}(R^m)$.

Dacă f este o distribuție (scalară) pe R^m, transformata Fourier $\tilde{f}$ este funcționala definită pe $\mathcal{Z}$ prin formula :

$$< \tilde{\varphi}, \tilde{f} > = (2\pi)^m < \varphi, f >.$$

De exemplu, distribuția lui Dirac are ca transformată Fourier tot unitatea, dar :

$$\mathcal{F}(1) = (2\pi)^m\ \delta(s_1, s_2, \ldots, s_m).$$

Proprietățile generale ale transformatei Fourier se mențin, adaptîndu-se însă la cazul mai multor variabile. Astfel au loc formulele :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_m}\right) \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\left[P(it_1, it_2, \ldots, it_m)\, f\right]$$

$$\mathcal{F}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m}\right) f\right] = P(-is_1, -is_2, \ldots, -is_m)\, \mathcal{F}(f)$$

analoge formulelor (15) și (16) din secțiunea 5.

Are de asemenea loc formula

$$\mathcal{F}(f \times g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g), \tag{32}$$

unde $f \times g$ este produsul direct al distribuțiilor f și g. Aici se poate presupune că f este o distribuție pe $\mathcal{D}(R^m)$, iar g pe $\mathcal{D}(R^n)$.

Notînd cu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un punct oarecare din $\mathcal{D}(R^m)$ și cu $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un punct din $\mathcal{D}(R^n)$, avem (a se vedea § 3):

$$< \varphi(x, y), f \times g > = < < \varphi(x, y), f(x) >, g(y) >$$

și

$$< \widetilde{\varphi}, \widetilde{f \times g} > = (2\pi)^{m+n} < \varphi, f \times g >.$$

Deoarece orice funcție $\varphi(x, y)$ indefinit derivabilă și cu suport compact este limita unui șir de combinații liniare finite de forma

$$\chi(x, y) = \sum_k \varphi_k(x)\, \psi_k(y),$$

vom stabili formula (32) utilizînd astfel de funcții.

Avem

$$< \widetilde{\chi}, \widetilde{f \times g} > = (2\pi)^{m+n} < \sum_k \varphi_k(x)\, \psi_k(y), f \times g > =$$

$$= (2\pi)^{m+n} \sum_k < \varphi_k, f > < \psi_k, g > = \sum_k < \widetilde{\varphi}_k, \widetilde{f} > < \widetilde{\psi}_k, \widetilde{g} > =$$

$$= < \sum_k \widetilde{\varphi}_k\, \widetilde{\psi}_k, \widetilde{f} \times \widetilde{g} > = < \widetilde{\chi}, \widetilde{f} \times \widetilde{g} >.$$

Am stabilit astfel formula (32).

Să aplicăm această formulă la două cazuri particulare simple.

Să considerăm produsul direct dintre distribuția 1, generată de funcția identic egală cu unu, și distribuția lui Dirac. Avem

$\mathcal{F}(1) = (2\pi)^m \delta(u)$ și $\mathcal{F}(\delta) = 1(v)$, unde $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ și $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Deci

$$\mathcal{F}(1(x) \times \delta(y)) = (2\pi)^m \delta(u) \times 1(v).$$

Analog

$$\mathcal{F}(\delta(x) \times 1(y)) = (2\pi)^m 1(u) \times \delta(v).$$

Transformarea Fourier a distribuțiilor în cazul a două sau trei variabile intervine de exemplu în unele probleme de optică.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale

În acest capitol vom studia ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili şi cu coeficienţi constanţi şi vom considera ecuaţii de convoluţie în vederea aplicaţiilor la ecuaţiile integrale.

§1. Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili

1. Considerăm mai întîi ecuaţii de forma

$$T' = AT + S, \tag{1}$$

unde

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$$

este un vector necunoscut cu componente distribuţii (cu valori într-un spaţiu Banach E), $A = (a_{ij})$ este o matrice formată din funcţii cu valori complexe (de variabila t), indefinit derivabile, iar

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}$$

este un vector dat cu componente distribuţii.

Ecuației (1) i se asociază în mod natural ecuația omogenă :

$$T' = AT. \tag{2}$$

Din teoria clasică se știe că ecuația (2) admite un sistem fundamental

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

de soluții reprezentate de vectori cu componente funcții indefinit derivabile cu valori complexe :

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1}(t) \\ x_{i2}(t) \\ \vdots \\ x_{in}(t) \end{pmatrix}$$

astfel încît

$$\Delta \equiv \det (x_{ij}(t)) \neq 0 \tag{3}$$

pentru orice t.

Orice soluție funcție (cu valori complexe) continuă și cu derivată continuă a ecuației (2) este de forma :

$$T = XC, \tag{4}$$

unde C este un vector constant.

Vom arăta că orice soluție distribuție cu valori în E este de forma (4), însă cu vectorul C format din componentele $C_1, \ldots, C_n$, elemente ale spațiului E.

Într-adevăr, dacă T este o soluție distribuție a ecuației (2), putem determina vectorul distribuție C, astfel încît să fie verificată relația (4), luînd :

$$C = X^{-1} T. \tag{5}$$

Să arătăm că acest vector este constant.

Derivînd relația (4) și ținînd seama din nou de ea obținem :

$$T' = X'C + XC' = AXC + XC' = AT + XC'.$$

Însă prin ipoteză T verifică ecuația (2), deci

$$XC' = 0.$$

Înmulțind la stînga cu X^{-1}, care există datorită condiției (3), avem

$$C' = 0$$

de unde rezultă că vectorul C nu depinde de t.

Pentru ecuația (1), oricare ar fi distribuția S, putem determina o soluție, prin metoda variației constantelor, la fel ca în cazul clasic.

Într-adevăr, să căutăm o soluție a ecuației (1), de forma :

$$T = XC, \tag{6}$$

unde C este un vector cu componente distribuții.

Din (6) deducem, ca mai sus :

$$T' = X'C + XC' = AT + XC'$$

și înlocuind în (1)

$$XC' = S$$

de unde

$$C' = X^{-1} S. \tag{7}$$

Deci orice distribuție de forma (6) în care C este o primitivă a distribuției $X^{-1} S$, este o soluție a ecuației (1). Este evident că două soluții ale ecuației (1) diferă printr-o soluție a ecuației omogene (2).

2. Să observăm că teoria de mai sus se poate extinde și pentru ecuații în care matricea A nu este formată din funcții indefinit derivabile.

În privința ecuației omogene (2), se știe că dacă elementele matricei A sînt funcții care admit derivate de ordin k, funcții continue, atunci există un sistem fundamental de soluții cu derivate de ordinul $k+1$, funcții continue.

Ecuația neomogenă (1) se poate rezolva prin metoda de mai sus, dacă expresia (7) are sens, deci dacă matricea X^{-1} este un multiplicator pentru distribuția S.

3. Rezultatele de mai sus se aplică, în particular, ecuației liniare de ordinul $n>1$, cu coeficienți continui :

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = f, \tag{8}$$

unde f este o funcție continuă.

Fie $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a(t)\, x = 0. \tag{9}$$

Funcțiile $x_1, \ldots x_n$ au derivate de ordinul n, continue.

Se știe că ecuația (8) se poate transforma în sistem de forma (1), dacă notăm:

$$T_1 = x,\ T_2 = x', \ldots, T_n = x^{(n-1)},$$

$$S_1 = 0, \ldots, S_{n-1} = 0,\ S_n = f,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

Sistemului fundamental de soluții ale ecuației (9) îi corespunde pentru (2) sistemul:

$$X = (X_1, \ldots, X_n),$$

unde

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_n' \\ \vdots \\ x_n^{(n-)} \end{pmatrix}.$$

Relația (7) este echivalentă, în acest caz, cu rezolvarea sistemului de ecuații:

$$\begin{aligned} x_1 C_1' + \ldots + x_n C_n' &= 0 \\ x_1' C_1' + \ldots + x_n' C_n' &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_1^{(n-2)} C_1' + \ldots + x_n^{(n-2)} C_n' &= 0 \\ x_1^{(n-1)} C_1' + \ldots + x_n^{(n-1)} C_n' &= f. \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția acestui sistem este dată de formulele lui Cramer :

$$C_1' = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_2 \dots & x_n \\ 0 & x_2' \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ f & x_2^{(n-1)} \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n-1}}{\Delta}\begin{vmatrix} x_2 \dots & x_n \\ x_2' \dots & x_n' \\ \dots & \dots \\ x_2^{(n-2)} \dots & x_n^{(n-2)} \end{vmatrix} f$$

$$C_2' = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & 0 \dots & x_n \\ x_1' & 0 \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & f \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n}}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \dots \\ x_1' & x_3' \dots \\ \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)} & x_3^{(n-2)} \dots \end{vmatrix} f$$

. . . . . .

$$C_n' = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \dots & 0 \\ x_1' & x_2' \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} \dots & f \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{2n-2}}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 \dots & x_{n-1} \\ x_1' \dots & x_{n-1}' \\ \dots & \dots \\ x_2^{(n-2)} \dots & x_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix} f,$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \dots & x_n \\ x_1' & x_2' \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)} & x_2^{(n-2)} \dots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Fie

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots & 1 \\ x_1 & x_2 \dots & x_n \\ x_1' & x_2' \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)} & x_2^{(n-2)} \dots & x_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

și A_{ni} determinantul obținut din W prin suprimarea primei linii și a coloanei i. Atunci

$$C_i'(t) = \frac{(-1)^{n+i}}{\Delta(t)} A_{ni}(t) f(t),$$

de unde o determinare a coeficienților C_i este dată de formula

$$C_i(t) = (-1)^{n+i} \int_0^t \frac{A_{ni}(s)}{\Delta(s)} f(s)\, ds. \tag{10}$$

O soluție a ecuației (8) este atunci :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} x_i(t) \int_0^t \frac{A_{ni}(s)}{\Delta(s)} f(s)\, ds = \tag{11}$$

$$= \int_0^t \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i-2} x_i(t) \frac{A_{ni}(s)}{\Delta(s)} f(s)\, ds = \int_0^t e(t, s) f(s)\, ds,$$

unde

$$e(t, s) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} x_i(t) \frac{A_{ni}(s)}{\Delta(s)}. \tag{12}$$

Observăm că funcția $e(t, s)$ se poate pune sub formă de determinant :

$$e(t, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1(s) & x_2(s) & \dots & x_n(s) \\ x_1'(s) & x_2'(s) & \dots & x_n'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)}(s) & x_2^{(n-2)}(s) & \dots & x_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Într-adevăr, dacă dezvoltăm acest determinant după elementele primei linii, obținem suma prin care am definit funcția $e(t, s)$.

În mod analog vom rezolva ecuația :

$$x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + \dots + a_n(t) x = \delta_s, \tag{14}$$

unde δ_s este distribuția lui Dirac :

$$<\varphi, \delta_s> = \varphi(s)$$

și $(a_1, \dots, a_n)$ sînt funcții continue. Cu aceleași calcule ca mai sus, căutăm o soluție a ecuației neomogene, de forma :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) C_i, \text{ unde } C_i \text{ sînt distribuții.} \tag{15}$$

Derivatele distribuțiilor C_i sînt date de formula:

$$C_i' = \frac{(-1)^{n+1}}{\Delta} A_{ni}\, \delta_s, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Putem „integra prin părți". Dacă notăm în general o primitivă a distribuției T prin *prim* T, vom putea lua:

$$C_i = \frac{(-1)^{n+i}}{\Delta} A_{ni}\, \theta_s - \text{prim}\left[\left(\frac{(-1)^{n+i}}{\Delta} A_{ni}\right)' \theta_s\right],$$

unde θ este funcția lui Heaviside și

$$\theta_s = \theta\,(t-s) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t<s, \\ 1 \text{ pentru } t>s. \end{cases}$$

Expresia din paranteza dreaptă este egală cu 0 pentru $t<s$ și cu $\left(\frac{(-1)^{n+i}}{\Delta(t)} A_{ni}(t)\right)'$ pentru $t>s$, deci o primitivă a ei este nulă pentru $t<s$ iar pentru $t>s$

$$(-1)^{n+i} \int_s^t \left(\frac{A_{ni}(u)}{\Delta(u)}\right)' du = (-1)^{n+i}\left[\frac{A_{ni}(t)}{\Delta(t)} - \frac{A_{ni}(s)}{\Delta(s)}\right].$$

Atunci C_i este funcția:

$$C_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t<s \\ (-1)^{n+i} \dfrac{A_{ni}(s)}{\Delta(s)} & \text{,, } t>s, \end{cases}$$

și o soluție a ecuației (14) este:

$$g_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t<s, \\ e(t,s) & \text{,, } t>s. \end{cases}$$

4. Să considerăm acum ecuația:

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = f, \tag{16}$$

unde $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ sînt funcții care admit derivate de ordinul m funcții continue, iar f este o distribuție de ordinul $m+1$.

Presupunem pentru simplificare că f are suport minorat.

Fie $g_s(t)$ soluția ecuației (14) găsită mai sus. Atunci $G = \{g_s\}_{s \in R}$ este o familie normală de distribuții dacă notăm tot prin g_s distribuția determinată de funcția $g_s(t)$.

Ecuația (16) are o soluție de forma :

$$x = G \circ f. \tag{17}$$

În cazul cînd coeficienții $a_k(t)$ sînt funcții indefinit derivabile, atunci formula (17) ne dă o soluție, oricare ar fi distribuția f (cu suport minorat).

Faptul că (17) reprezintă o soluție a ecuației (16) rezultă cu proprietatea 6°, secțiunea 8, § 3, Cap. II. Într-adevăr, notînd cu A operatorul diferențial din primul membru al ecuației (16), această ecuație se scrie

$$Ax = f.$$

Cu proprietatea menționată, avem

$$A(G \circ f) = (AG) \circ f = \{Ag_s\}_{s \in R} \circ f = \{\delta_s\}_{s \in R} \circ f = f,$$

deci distribuția (17) reprezintă o soluție.

În acest mod se pot rezolva de exemplu ecuațiile de forma :

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = \delta_s^{(m+1)},$$

unde coeficienții $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ sînt funcții care admit derivate de ordinul m, funcții continue.

Ca ilustrare să considerăm cazul $m = 0$. Avem deci $f = \delta_s'$ și $x = G \circ \delta_s'$. Avem de asemenea

$$<\varphi, G \circ \delta_s'> = <\psi, \delta_s'> = -\psi'(s),$$

unde

$$\psi(s) = <\varphi, g_s>.$$

Dar

$$\psi'(s) = <\varphi, \frac{\partial}{\partial s} g_s>$$

deci

$$G \circ \delta_s' = -\frac{\partial}{\partial s} g_s. \tag{18}$$

Aplicînd la cazul cînd :

$$g_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t<s \\ e(t,\ s) & ,, \quad t>s \end{cases}$$

și știind că $e(s,\ s) = 0$, găsim

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t<s \\ -\dfrac{\partial e(t,\ s)}{\partial s} & ,, \quad t>s. \end{cases}$$

Obținem astfel o soluție a ecuației

$$(.) \qquad x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = \delta_s',$$

cu $n > 1$.

După cum am văzut, folosind operația de compunere cu familii de distribuții, rezolvarea ecuației de formă (16) se poate reduce la rezolvarea ecuației de forma (14).

Problema găsirii soluției (17) revine la găsirea funcției $e(t,\ s)$, adică cu formula (13), la găsirea unui sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (9).

Din expresia (13) a lui $e(t,\ s)$, rezultă că pentru s fix, funcția $e(t,\ s)$ este soluția ecuației omogene

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = 0$$

care satisface următoarele condiții inițiale :

$$(19) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^k e(t,\ s)}{\partial t^k}\right)_{t=s} = 0, & (k = 0, 1, 2, \ldots, n-2) \\ \left(\dfrac{\partial^{n-1} e(t,\ s)}{\partial t^{n-1}}\right)_{t=s} = 1. \end{cases}$$

Exemple. Să considerăm ecuația

$$(20) \qquad x'' + \frac{t}{t^2+1}\, x' - \frac{1}{t^2+1}\, x = \delta_s.$$

Se poate verifica faptul că ecuația omogenă corespunzătoare are soluția generală

$$(21) \qquad x(t) = \alpha\,(t + \sqrt{t^2+1}) + \beta\,(t - \sqrt{t^2+1}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd condiţiile (18) obţinem ecuaţiile :

$$\alpha(s+\sqrt{s^2+1})+\beta(s-\sqrt{s^2+1})=0,$$

$$\alpha\left(1+\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right)+\beta\left(1-\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)=1.$$

Aplicînd regula lui Cramer obţinem

$$\alpha=\frac{s^2+1-s\sqrt{s^2+1}}{2},\quad \beta=\frac{s^2+1+s\sqrt{s^2+1}}{2}.$$

Înlocuind în (21) se găseşte

$$e(t,\ s)=t(s^2+1)-s\sqrt{(t^2+1)\ (s^2+1)}.$$

Rezultă pentru ecuaţia (20) următoarea soluţie :

$$x_s(t)=\begin{cases}0 & \text{pentru } t<s,\\ t(s^2+1)-s\sqrt{(t^2+1)\,(s^2+1)} & \text{pentru } t>s.\end{cases}$$

Pentru ecuaţia care se deduce din (20) înlocuind membrul drept prin δ_s', obţinem cu (18) soluţia

$$y_s(t)=\begin{cases}0 & \text{pentru } t<s,\\ -2st+(2s^2+1)\sqrt{\dfrac{t^2+1}{s^2+1}} & \text{pentru } t>s.\end{cases}$$

Să verificăm prin înlocuire că $y=y_s$ este o soluţie a ecuaţiei

$$y''+\frac{t}{t^2+1}\,y'-\frac{1}{t^2+1}\,y=\delta_s'. \tag{22}$$

Avem deci

$$y=\left[-2st+\frac{2s^2+1}{\sqrt{s^2+1}}\sqrt{t^2+1}\right]\theta(t-s),$$

unde $\theta(\tau)$ este funcţia lui Heaviside.

Aplicînd regula de derivare a distribuţiilor obţinem

$$y'=\left[-2s+\frac{2s^2+1}{\sqrt{s^2+1}}\,\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right]\theta(t-s)+\delta_s,$$

ținînd seama că pentru $t = s$ expresia

$$-2st + \frac{2s^2+1}{\sqrt{s^2+1}}\sqrt{t^2+1}$$

devine egală cu unu.

Avem mai departe

$$(23)\quad y'' = \frac{2s^2+1}{\sqrt{s^2+1}}\,\frac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}\,\theta(t-s) - \frac{s}{s^2+1}\,\delta_s + \delta_s'.$$

Avem apoi

$$(24)\quad -\frac{1}{t^2+1}\,y = \left[\frac{2st}{t^2+1} - \frac{2s^2+1}{\sqrt{s^2+1}}\,\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right]\theta(t-s),$$

$$(25)\quad \frac{t}{t^2+1}\,y' = \left[-\frac{2st}{t^2+1} + \frac{2s^2+1}{\sqrt{s^2+1}}\,\frac{t^2}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}\right]\theta(t-s) + \frac{s}{s^2+1}\,\delta_s,$$

ținînd seama că

$$\frac{t}{t^2+1}\,\delta_s = \frac{s}{s^2+1}\,\delta_s.$$

Adunînd membru cu membru, egalitățiile (23), (24) și (25), obținem (22).

5. În această secțiune și în secțiunea următoare, vom studia ecuații diferențiale liniare cu impulsuri *).

Să considerăm ecuația

$$(26)\quad X' = A(t)\,X + \sum_k \Lambda_k\,\delta(t-t_k),$$

unde $A(t)$ este o matrice pătrată cu n linii, formată din funcții care admit derivate continue pînă la ordinul m inclusiv; șirul

$$\ldots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots$$

verifică condițiile: $t_k < t_{k+1}$, $\lim_{k\to-\infty} t_k = -\infty$, $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$; $\Lambda_k \in R^n$ și $\Lambda_k \neq 0$ pentru orice k.

*) Rezultatele acestei secțiuni și ale secțiunii următoare aparțin lui D. Wexler [33].

În ecuația (26), necunoscuta X este un vector cu componente (scalare) distribuții de ordin cel mult m. Deci X este o distribuție vectorială, cu valori în R^n.

Ecuația omogenă asociată ecuației (26) este

$$Y' = A(t)\, Y. \tag{27}$$

Dacă $X_0(t, s)$ este matricea fundamentală de soluții uzuale ale ecuației (27), așa ca $X_0(s, s)$ să fie matricea identitate, atunci soluțiile ecuației (27) sînt de forma

$$Y = Z(t, s)\, C,$$

unde $C \in R^n$, (chiar în cazul cînd ecuația (27) este considerată în distribuții).

Vom arăta că soluțiile ecuației (26) sînt distribuții (vectoriale) date de funcții cu derivate continue pe fiecare interval de forma (t_k, t_{k+1}).

Mai precis vom arăta că o soluție este de forma

$$X = Z(t, t_k)\, C_k, \qquad (t_k \leqslant t < t_{k+1}), \tag{28}$$

unde $C_k \in R^n$ și C_k verifică sistemul de ecuații cu diferențe finite:

$$C_{k+1} = Z(t_{k+1}, t_k)\, C_k + \Lambda_{k+1}. \tag{29}$$

Pentru aceasta să observăm mai întîi că dacă pentru ecuația (26) există o soluție X_1 ale cărei componente sînt funcții, atunci o altă soluție X_2 va fi de același tip, deoarece diferența lor $X_2 - X_1$ este o soluție a ecuației omogene (27).

Deoarece pe orice interval de forma (t_k, t_{k+1}) o soluție X a ecuației (26) este o soluție a ecuației (27), X va fi de forma (28). Dacă notăm cu X derivata obișnuită a lui $X(t)$, definită pentru $t \neq t_k$, atunci derivata lui X în sensul distribuțiilor va fi:

$$X' = X + \sum_k (C_{k+1} - Z(t_{k+1}, t_k)\; C_k)\, \delta(t - t_{k+1}) =$$

$$= A(t)\, X + \sum_k (C_{k+1} - Z(t_{k+1}, t_k)\, C_k)\, \delta(t - t_{k+1}).$$

Deci X este o soluție a ecuației (26), dacă și numai dacă șirul $\{C_k\}$ verifică sistemul (29).

Să observăm acum că pentru orice $s \in R^1$ și $C \in R^n$, există o singură soluție $X = X(t, s, C)$ a ecuației (26) care satisface condiția

$$X(s, s, C) = C. \tag{30}$$

Într-adevăr, o soluție X este determinată de șirul $\{C_k\}$ iar acest șir este determinat cu (29) de un termen al său C_{k_0}. Dacă $t_i \leqslant s \leqslant t_{i+1}$ iar $\{C_k\}$ este soluția sistemului (29) corespunzătoare lui

$$C_i = Z(t_i, s)\ C,$$

atunci soluția ecuației (26) corespunzătoare șirului $\{C_k\}$ este singura soluție care verifică (30).

Dacă notăm cu $X(t, C)$ soluția $X(t, t_0, C)$, se poate arăta că soluțiile sistemului (26) sînt de forma

$$X(t, C) = Z(t, t_0)\, C + \sum_{t_1 \leqslant t_i \leqslant t} Z(t, t_i)\, \Lambda_i$$

pentru $t \geqslant t_1$.

6. Vom studia acum problema periodicității soluțiilor $X(t, C)$ ale ecuației (26).

O distribuție f se zice că este *periodică de perioadă* ω, dacă $\tau_\omega f = f$.

Deoarece funcțiile (vectoriale) $X(t, C)$ sînt continue pentru $t \neq t_k$, iar în punctele t_k au salturile Λ_k, rezultă că dacă ecuația (26) are o soluție periodică de perioadă ω, atunci există un număr întreg $p > 0$ așa ca șirul $\{\Lambda_k\}$ să fie periodic, de perioadă p, iar șirul $\{t_k\}$ să verifice condiția:

$$t_{k+p} = t_k + \omega.$$

Se poate demonstra că aceste proprietăți ale șirurilor $\{\Lambda_k\}$, $\{t_k\}$ sînt necesare și suficiente pentru ca distribuția (vectorială):

$$f = \sum_k \lambda_k \delta(t - t_k) \tag{31}$$

să fie periodică de perioadă ω.

Vom presupune că matricea $A(t)$ și distribuția (vectorială) f de forma (31), sînt periodice, de perioadă ω. Atunci sistemul omogen cu diferențe:

$$B_{k+1} = Z(t_{k+1}, t_k)\, B_k \tag{32}$$

corespunzător sistemului (29) este un sistem periodic de perioadă p. Rezultă că $Y(t, t_0, C^j)$, $(0 \leqslant j \leqslant m)$, sînt soluții periodice de perioadă ω, liniar independente ale ecuației (27), dacă și numai dacă șirurile $\{Y(t_k, t_0, C^j\}_k$, $(0 \leqslant j \leqslant m)$, sînt soluții periodice de perioadă p, liniar independente ale sistemului (32).

$X(t, C)$ este o soluție periodică, de perioadă ω, a sistemului (26) dacă și numai dacă șirul vectorilor

$$C_k = Z(t_k, C) \tag{33}$$

reprezintă o soluție periodică de perioadă p a sistemului (29).

Într-adevăr, necesitatea este imediată, deoarece dacă $X(t, C)$ are perioada ω, atunci

$$C_p = X(t_p, C) = X(t_0 + \omega, C) = X(t_0, C) = C = C_0,$$

iar sistemul (32) este periodic de perioadă p.

Reciproc, dacă șirul vectorilor de forma (33) este o soluție de perioadă p a sistemului (29), atunci

$$X(t_0 + \omega, C) = X(t_p, C) = C_p = C_0,$$

de unde

$$X(t_0 + \omega, C) = X(t_0, C).$$

Astfel $X(t, C)$ și $X(t + \omega, C)$ sînt soluții ale ecuației (26) care sînt egale pentru $t = t_0$. Cu o observație precedentă (asupra unicității soluțiilor ecuației (26)), deducem

$$X(t + \omega, C) \equiv x(t, C).$$

Ca încheiere să considerăm cazul cînd $t_k = t_0 + k\omega$ și $\Lambda_k = \Lambda$ (oricare ar fi k). Vom arăta că în acest caz soluția periodică a ecuației (26) este de forma

$$X(t, C) = Z\left(t, t_0 + E\left(\frac{t - t_0}{\omega}\right)\omega\right)C, \tag{34}$$

unde $E(\alpha)$ înseamnă partea întreagă a lui α iar

$$C = (I - Z(t_0 + \omega, t_0)^{-1})\Lambda. \tag{35}$$

Într-adevăr, în cazul de față avem $p = 1$, iar

$$Z(t_{k+1}, t_k) = Z(t_0 + (k+1)\omega, t_0 + k\omega) = Z(t_0 + \omega, t_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul (29) va fi deci

$$C_{k+1} = Z(t_0 + \omega,\ t_0)\, C_k + \Lambda$$

și unica sa soluție de perioadă $p = 1$ este un șir $\{C_k\}$ constant, $C_k = C$, unde C verifică ecuația

$$C = Z(t_0 + \omega,\ t_0)\, C + \Lambda.$$

Deci C este de forma (35).

Soluția de perioadă ω a ecuației (26) este în acest caz de forma:

$$X(t,\ C) = Z(t,\ t_k)\, C, \qquad (t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}).$$

Pe de altă parte, din inegalitățile $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ rezultă

$$k \leqslant \frac{t - t_0}{\omega} < k + 1,$$

de unde

$$k = E\left(\frac{t - t_0}{\omega}\right).$$

Deci

$$t_k = t_0 + E\left(\frac{t - t_0}{\omega}\right)\omega$$

astfel că $X\ (t,\ C)$ se scrie sub forma (34).

§ 2. Ecuația cu coeficienți constanți

1. Să considerăm ecuația

$$a_0\, x^{(n)} + a_1\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n\ x = f, \tag{1}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt constante (numere complexe) cu $a_0 \neq 0$, iar f este o distribuție (scalară).

O distribuție g care satisface ecuația

$$a_0\, g^{(n)} + a_1\, g^{(n-1)} + \ldots + a_n\, g = \delta \tag{2}$$

se numește o soluție elementară a ecuației (1).

În aplicații sîntem interesați mai ales de soluții elementare care sînt nule pentru $t<0$. Dacă o astfel de soluție elemen-

tară este găsită, atunci pentru orice distribuţie f cu suport minorat, ecuaţia (1) are o soluţie de forma :

(3) $$x = g * f.$$

Este un caz particular al soluţiei de forma (17) din § 1, dacă luăm $G = \{\tau_s g\}_{s \in R}$.

Se observă uşor că dacă g este o soluţie a ecuaţiei (2), atunci $g_s = \tau_s g$ este o soluţie a ecuaţiei

(4) $$a_0 g_s^{(n)} + a_1 g_s^{(n-1)} + \ldots + a_n g_s = \delta_s.$$

Cu proprietăţile convoluţiei, rezultă de asemenea că oricare ar fi soluţia elementară g, distribuţia (3) este o soluţie a ecuaţiei (1), dacă f are suportul mărginit.

O soluţie elementară se poate găsi prin metoda dată în § 1. Vom arăta aici şi altă cale pentru găsirea soluţiei elementare a unei ecuaţii cu coeficienţi constanţi.

Să considerăm un sistem fundamental $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ de soluţii ale ecuaţiei omogene

(5) $$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0$$

şi să punem

$$e_0(t) = \alpha_1 x_1(t) + \ldots + \alpha_n x_n(t)$$
$$e_1(t) = \beta_1 x_1(t) + \ldots + \beta_n x_n(t)$$

precum şi

$$g(t) = \begin{cases} e_0(t) \text{ pentru } t<0, \\ e_1(t) \text{ pentru } t>0. \end{cases}$$

Ţinînd seama că distribuţia lui Dirac este derivata funcţiei lui Heaviside, pentru ca $g(t)$ să verifice ecuaţia (2) deducem că este suficient ca următoarele condiţii să fie verificate (a se vedea secţiunea 3, § 2, Cap. II) :

(6) $$\begin{cases} e_1^{(k)}(0) = e_0^{(k)}(0), & (k = 0, 1, 2, \ldots, n-2), \\ e_1^{(n-1)}(0) - e_0^{(n-1)}(0) = \dfrac{1}{a_0}. \end{cases}$$

Să notăm $\gamma_i = \beta_i - \alpha_i$. Din condițiile (6) rezultă următorul sistem de ecuații în necunoscutele γ_i:

$$(7)\qquad \begin{cases} \gamma_1 x_1(0) + \ldots + \gamma_n x_n(0) = 0 \\ \gamma_1 x_1'(0) + \ldots + \gamma_n x_n'(0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1 x_1^{(n-2)}(0) + \ldots + \gamma_n x_n^{(n-2)}(0) = 0 \\ \gamma_1 x_1^{(n-1)}(0) + \ldots + \gamma_n x_n^{(n-1)}(0) = \dfrac{1}{a_0}. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem fiind wronskianul (calculat în punctul $t = 0$) soluțiilor liniare independente $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, este nenul. Cu regula lui Cramer găsim un sistem unic de numere $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Obținem deci o infinitate de sisteme de numere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ cu ajutorul cărora construim soluții elementare.

2. Un rol important în aplicații îl joacă soluția elementară care verifică condiția $g(t) = 0$ pentru $t < 0$. Această soluție este unică. Ea se construiește căutînd soluția $x = e(t)$ a ecuației omogene (5) care verifică condițiile:

$$(8)\qquad \begin{cases} e^{(k)}(0) = 0, & (k = 0, 1, 2, \ldots, n-2) \\ e^{(n-1)}(0) = \dfrac{1}{a_0} \end{cases}$$

și luînd apoi

$$(9)\qquad g(t) = \theta(t)\, e(t),$$

unde θ este funcția lui Heaviside.

Este interesant de remarcat că ecuația diferențială (18) se poate scrie și sub forma

$$(10)\qquad (A\delta) * x = f,$$

unde A este operatorul diferențial:

$$A = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Într-adevăr, folosind proprietățile convoluției, avem

$$(A\delta) * x = A(\delta * x) = Ax.$$

Dacă $e\ (t)$ este soluţia ecuaţiei omogene (5), care verifică condiţiile (8) şi dacă $g\ (t)$ este dată de formula (9), atunci

$$Ag = (A\delta) * g = (A\delta) * (\theta e) = \delta,$$

după cum se constată direct prin calcul.

Se obţine astfel o nouă verificare a faptului că funcţia (9) este o soluţie elementară.

3. Să găsim acum soluţia elementară de forma (9) adică de forma

$$g\ (t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t<0 \\ e(t) & \text{pentru } t>0 \end{cases} \tag{11}$$

într-un caz special

Fie

$$A\ (p) = a_0\, p^n + a_1\, p^{n-1} + \ldots + a_n p$$

şi să notăm cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ rădăcinile acestui polinom.

Vom presupune că rădăcinile sînt simple şi reale.

Se ştie că în acest caz funcţiile :

$$x_k(t) = \exp\ (p_k t), \qquad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

sînt soluţii liniare independente ale ecuaţiei (5).

Sistemul (7) în care luăm $\gamma_1 = \beta_1$ devine :

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 0 \\ p_1\, \beta_1 + p_2\, \beta_2 + \ldots + p_n\ \beta_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1^{n-2}\, \beta_1 + p_2^{n-2}\, \beta_2 + \ldots + p_n^{n-2}\ \beta_n = 0 \\ p_1^{n-1}\, \beta_1 + p_2^{n-1}\ \beta_2 + \ldots + p_n^{n-1}\ \beta_n = \dfrac{1}{a_0} \end{cases} \tag{12}$$

Determinantul acestui sistem este determinantul lui Vandermonde :

$$W_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{n-2} & p_2^{n-2} & \dots & p_n^{n-2} \\ p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \dots & p_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (p_1-p_2)\dots(p_1-p_n)(p_2-p_3)\dots$$

$$\dots(p_2-p_n)\dots(p_{n-1}p_n).$$

Cu regula lui Cramer avem

$$\beta_k = \frac{W_k}{W_0}, \qquad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{13}$$

unde

$$W_k = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & & p_{k-1} & 0 & p_{k+1} & & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{n-2} & & p_{k-1}^{n-2} & 0 & p_{k+1}^{n-2} & & p_n^{n-2} \\ p_1^{n-1} & & p_{k-1}^{n-1} & \frac{1}{a_0} & p_{k+1}^{n-1} & & p_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+k}\frac{1}{a_0}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & & p_{k-1} & p_{k+1} & & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{n-2} & & p_{k-1}^{n-2} & p_{k+1}^{n-2} & & p_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Determinantul W_k^* este tot de tip Vandermonde, format cu $p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_n$. Deci dezvoltarea lui W_k^* ne va

da o formulă asemănătoare lui W_0, dar în care suprimăm factorii $p_i - p_j$ care conțin p_k și înlocuim $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ prin $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

Înlocuind în (13) obținem

$$\beta_k = \frac{(-1)^{k-1}}{a_0 (p_1 - p_k) \ldots (p_{k-1} - p_k)(p_k - p_{k+1}) \ldots (p_k - p_n)} =$$

$$= \frac{1}{a_0 (p_k - p_1) \ldots (p_k - p_{k-1})(p_k - p_{k+1}) \ldots (p_k - p_n)} = \frac{1}{A'(p_k)}.$$

Soluția elementară căutată va fi

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A'(p_k)} \exp(p_k t) & \text{pentru } t > 0. \end{cases}$$

4. Ca încheiere la acest paragraf, vom calcula, ca exemplu, soluția elementară de tipul (11) în cîteva cazuri particulare. Vom considera și cazul cînd rădăcinile polinomului $A(p)$ din secțiunea 2, nu sînt simple sau nu sînt reale.

Să considerăm mai întîi ecuația

$$x^{(n)} = \delta. \tag{14}$$

Pentru ecuația omogenă corespunzătoare, funcțiile $x_1(t) \equiv 1$ și $x_2(t) \equiv t$ reprezintă un sistem fundamental de soluții.

Vom căuta o soluție a ecuației (14) de forma:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ \alpha + \beta t & \text{pentru } t > 0. \end{cases}$$

Funcția $e(t) = \alpha + \beta t$ va fi supusă condițiilor

$$e(0) = 0, \quad e'(0) = 1$$

și se găsește imediat $\alpha = 0$ și $\beta = 1$.

Deci

$$g(t) = g \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ t & \text{pentru } t > 0. \end{cases}$$

Distribuția definită de această formulă se notează cu t_+.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă f este o distribuție cu suport minorat, oarecare atunci pentru ecuația

(15) $$x'' = f$$

distribuția

$$x = t_+ * f$$

reprezintă o soluție.

Vom considera acum ecuația

(16) $$x'' + x' + x = \delta.$$

Polinomul

$$A(p) = p^2 + p + 1$$

are rădăcinile complexe:

$$p_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}, \quad p_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$$

și deci două soluții liniare independente ale ecuației omogene

(17) $$x'' + x' + x = 0$$

sînt

$$x_1(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad x_2(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Pentru a găsi soluția de tipul (11) a ecuației (16), vom scrie mai întîi soluția generală a ecuației omogene (17):

$$x(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\left(\alpha\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \beta\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Vom determina apoi α și β așa ca:

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Prima condiție ne dă imediat $\alpha = 0$, deci

$$x(t) = \beta\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Derivînd și ținînd seama de a doua condiție găsim $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci soluţia elementară căutată este

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t<0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}t\right) \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2}t & \text{pentru } t>0. \end{cases}$$

Se poate de asemenea verifica uşor că ecuaţia

(18) $$x'' + \omega^2 x = \delta \quad (\omega \text{ real})$$

are soluţia

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t<0, \\ \dfrac{1}{\omega} \sin \omega t & \text{pentru } t>0. \end{cases}$$

Găsirea soluţiilor elementare de tipul (11) prezintă importanţă în studiul sistemelor dinamice liniare şi staţionare, după cum vom vedea în Cap. VII.

§ 3. Ecuaţii de convoluţie

Să considerăm ecuaţia integrală Volterra (de speţa 2-a):

(1) $$f(t) + \int_0^t k(s-t)\, f(s)\, ds = g(t), \qquad (t \geqslant 0),$$

unde nucleul k este o funcţie măsurabilă şi mărginită pe orice interval finit, iar g este o funcţie local sumabilă.

Ecuaţia (1) se poate pune sub forma:

(2) $$h * f = g.$$

dacă prelungim $f(t)$ şi $g(t)$ prin valoarea zero pentru $t<0$ şi dacă punem $h = \delta + k$. Necunoscuta în ecuaţia (2) este f, care se va căuta în mulţimea distribuţiilor $\mathcal{D}'_+$.

Pentru a se rezolva ecuaţia (2) este suficient să găsim $h_1 \in \mathcal{D}'_+$ aşa ca:

$$h * h_1 = \delta.$$

Soluţia ecuaţiei (18) va fi atunci

$$f = h_1 * g.$$

Distribuția δ joacă rol de unitate în $\mathcal{D}'^{+}$ față de produsul de compoziție, iar h_1 va fi inversa lui h. Ținînd seama că inversul lui $1+\lambda$ este seria $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\lambda^n$, cînd aceasta este convergentă, vom căuta inversa în $\mathcal{D}'^{+}$ a lui $h=\delta+k$ sub forma

$$h_1=\delta+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n k^{*n}. \tag{3}$$

Am notat prin k^{*n} produsul de convoluție al lui k prin el însuși de n ori.

Să stabilim convergența seriei din (3).

Dacă notăm

$$\lambda_\alpha=\sup_{0\leqslant t\leqslant\alpha}|k(t)|,$$

atunci pe segmentul $[0,\ \alpha]$

$$|k^{*2}(t)|=\left|\int_0^t k(s-t)\,k(s)\,ds\right|\leqq\lambda_\alpha^2 t.$$

Prin inducție putem arăta că

$$|k^{*n}(t)|\leqslant\lambda_\alpha^n\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}$$

dacă $t\in[0,\ \alpha]$.

Deci seria din (3) este uniform convergentă în orice segment $[0,\ \alpha]$, termenii săi fiind majorați în modul de termenii unei serii numerice convergente.

Are deci sens distribuția h_1 dată de formula (3) și se verifică imediat că este inversa lui h față de convoluție.

Dacă notăm acum

$$k_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n k^{*n},$$

atunci k_1 este o funcție care se anulează pentru $t<0$ și soluția ecuație (17) va fi :

$$f(t)=g(t)+\int_0^t k_1(s-t)\,g(s)\,ds.$$

Să considerăm acum ecuația lui Volterra de speța întîi, adică

$$\int_0^t k(s-t)\, f(s)\, ds = g(t), \qquad (t \geqslant 0).$$

Ea se poate scrie sub forma

$$k * f = g.$$

În acest caz vom căuta k_1 astfel încît

$$k * k_1 = \delta. \tag{4}$$

Această ecuație nu are totdeauna soluție.

Într-adevăr, dacă nucleul k este o funcție indefinit derivabilă (prelungită cu valoarea zero pentru $t < 0$) atunci $k * f$ este o funcție indefinit derivabilă, oricare ar fi $f \in \mathcal{D}'^{+}$. Deci nu există $k_1 \in \mathcal{D}'^{+}$ care să verifice (4). În cazul cînd k_1 există, acesta nu poate fi o funcție deoarece convoluția $k * k_1$ a două funcții este tot o funcție.

Capitolul IV

Unele aplicaţii în fizică

Teoria distribuţiilor are aplicaţii importante în fizică, dar o expunere mai amplă în această direcţie ar depăşi cadrul acestei cărţi. În acest capitol vom da cîteva exemple de mărimi fizice exprimate prin distribuţii şi vom arăta pe scurt unele aplicaţii în studiul circuitelor electrice şi în anumite probleme de optică.

§ 1. Mărimi fizice exprimate prin distribuţii

1. Distribuţiile intervin în mod natural în fizică, de exemplu ca mase materiale sau ca sarcini electrice.

Să considerăm un sistem material format dintr-un segment de dreaptă $[\alpha, \beta]$ pe care este repartizată o masă. Fie $m(t)$ densitatea acestei mase. Atunci masa sistemului este

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} m(t)\, dt \tag{1}$$

iar abscisa t_0 a centrului de greutate este

$$t_0 = \frac{1}{M} \int_{\alpha}^{\beta} t m(t)\, dt. \tag{2}$$

Dacă înlocuim segmentul $[\alpha, \beta]$ prin toată dreapta reală şi prelungim funcţia $m(t)$ în afara lui $[\alpha, \beta]$ prin valoarea zero, atunci formulele (1), (2) se pot scrie :

$$M = <1, m>, \tag{3}$$

$$t_0 = \frac{1}{M} <t, m>. \tag{4}$$

Formulele (3), (4) au sens, deoarece funcţia $m(t)$ defineşte o distribuţie cu suport mărginit. Aceste formule au de altfel sens şi pentru o distribuţie numerică oarecare cu suport mărginit.

Să punem

$$m = \alpha \delta_\sigma, \tag{5}$$

unde α şi σ sînt numere reale. Înlocuind în (3), (4) obţinem

$$M = <1, \alpha\delta_\sigma> = \alpha$$

$$t_0 = \frac{1}{M} <t, \alpha\delta_\sigma> = \sigma.$$

Aceste formule ne arată că punctul material de abscisă σ şi de masă α este caracterizat de distribuţia m dată de (5).

Dacă considerăm un sistem de n puncte materiale de abscise $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ şi de mase $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, atunci acest sistem este caracterizat de distribuţia :

$$m = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{\sigma_k}. \tag{6}$$

Masa totală a sistemului, precum şi centrul de greutate se calculează în acelaşi mod :

$$M = <1, m> = <1, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{\sigma_k}> = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k <1, \delta_{\sigma_k}> = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$

$$t_0 = \frac{1}{M} <t, m> = \frac{1}{M} <t, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{\sigma_k}> = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sigma_k.$$

În cazul unui spaţiu cu mai multe dimensiuni, un sistem de puncte materiale este caracterizat tot de formula (6), unde σ_k va reprezenta sistemul coordonatelor punctului respectiv.

Scanned with OKEN Scanner

2. Dipolul poate fi definit în mod simplu ca o distribuţie. Să considerăm cazul unui dipol de moment electric unitate aflat în punctul 0 pe axa reală. Pentru a-l defini se consideră în punctele 0 şi ε respectiv masele $-\frac{1}{\varepsilon}$ şi $\frac{1}{\varepsilon}$. Aceste mase constituie un sistem depinzînd de ε şi căruia i se ataşează distribuţia

$$F_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\delta_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\delta.$$

Rezultă

$$<\varphi, F_\varepsilon> = \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon}.$$

Dipolul va fi atunci definit de distribuţia F care se obţine cînd facem $\varepsilon \to 0$.

Rezultă că această distribuţie este dată de formula

$$<\varphi, F> = \varphi'(0),$$

Putem considera şi dipoli în spaţiul cu trei dimensiuni, orientaţi după o anumită direcţie.

Dacă în punctul $a \in R^3$ avem un dipol de moment electric M şi orientat după o direcţie l, atunci acest dipol este reprezentat de distribuţia F dată de formula

$$<\varphi, F> = MD_l\varphi(a),$$

unde am notat prin D_l derivata după direcţia l.

3. Menţionăm de asemenea că în mecanica cuantică se utilizează în mod curent distribuţiile:

$$\delta^+ = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{t}$$

$$\delta^- = \frac{1}{2}\cdot\delta - \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{t}$$

dar nu vom insista aici asupra lor.

§ 2. Aplicații la circuite electrice

1. Să considerăm un circuit electric ca în figura 1 care conține o rezistență R, un condensator de capacitate C și un self L. Să presupunem că în circuit curentul a fost nul la momentul $t = t_0$ și că începînd de la acest moment se stabilește un curent în circuit cu ajutorul unei tensiuni $E = E(t)$, depinzînd de timp. Fie $I = I(t)$ curentul care circulă în circuit și care depinde de asemenea de timp.

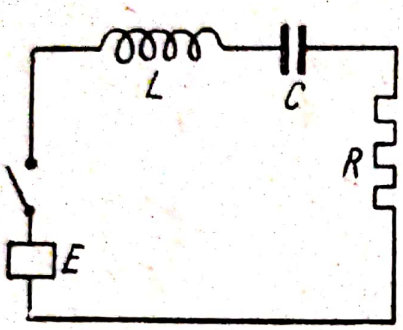


Fig. 1. — Circuit electric cu rezistență (R), capacitate (C) și self (L).

Vom considera funcțiile $E(t)$ și $I(t)$ definite pe toată dreapta punînd: $E(t) = 0$ și $I(t) = 0$ pentru $t < t_0$.

Intensitatea I depinde evident de tensiunea E.

Să punem $I = F(E)$. Fie $E_1 = E_1(t)$, $E_2 = E_2(t)$ și $I_1 = F(E_1)$, $I_2 = F(E_2)$. Atunci $F(E_1 + E_2) = I_1 + I_2$ după cum se știe din electrotehnică. Dacă $F(E) = I$, atunci $F(\lambda E) = I$ oricare ar fi numărul λ. Dacă $I = F(E)$ și $E(t) = 0$ pentru $t < 0$, atunci și $I(t) = 0$ pentru $t < 0$. Circuitul este un sistem fizic invariant în timp, adică dacă $I = F(E)$ și dacă $I_0 = F(E_0)$ cu $E_0(t) = E(t - t_0)$, atunci $I_0(t) = I(t - t_0)$.

Teoretic se admite ca tensiune $E(t)$ și distribuția lui Dirac care corespunde unei excitații care acționează într-un interval de timp relativ foarte mic dar de mărime foarte mare.

Deci printre tensiuni este util să admitem și distribuții.

Pe de altă parte și intensitatea curentului poate apare ca o distribuție.

Într-adevăr, se știe că intensitatea curentului este derivata în raport cu timpul a cantității de electricitate trecute prin circuit. Să presupunem că prin circuit trece, de la un moment t_0, o cantitate de electricitate constantă egală cu λ. Atunci cantitatea de electricitate este dată de funcția $q(t) = \lambda\theta(t - \theta_0)$, unde $\theta(t)$ este funcția lui Heaviside. Intensitatea va fi deci $I(t) = \lambda\delta(t - t_0)$.

Este deci util a considera F ca un operator liniar definit pe $\mathcal{D}'^+$ cu valori în $\mathcal{D}'^+$. Acest operator este necesar a fi presu-

pus și continuu față de convergența distribuțiilor. Datorită liniarității, continuității și proprietății :

$$F(\tau_s x) = \tau_s y,$$

dacă $F(x) = y$, operatorul F va fi o convoluție (vezi L. Schwartz, [26])

$$F(x) = a * x$$

unde a este o anumită distribuție. Mai precis, a este „răspunsul impulsiv" al sistemului, adică intensitatea obținută ca răspuns la tensiunea δ.

În cazul circuitului din figura 1, relația dintre tensiune și intensitate (pentru $t_0 = 0$) este, după cum se știe din electrotehnică,

$$E(t) = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt. \tag{1}$$

Să notăm

$$Z = R\delta + L\delta' + \frac{1}{C}\theta. \tag{2}$$

Atunci (1) se poate scrie :

$$E = Z * I. \tag{3}$$

Distribuția Z, care aparține lui $\mathcal{D}'^{+}$, se numește *impedanța* circuitului.

Se numește *admitanța* circuitului, distribuția A pentru care

$$Z * A = \delta. \tag{4}$$

Dacă derivăm distribuția Z dată de formula (2), obținem

$$Z' = L\delta'' + R\delta' + \frac{1}{C}\delta \tag{4'}$$

și convoluția lui Z' cu o distribuție este echivalentă cu aplicarea unui operator diferențial acelei distribuții. Din (4) și (5) rezultă

$$LA'' + RA' + \frac{1}{C}A = \delta'. \tag{5}$$

Deci admitanța circuitului este soluția $A \in \mathcal{D}'^{+}$ a ecuației (5) care este de tipul celor studiate în Cap. III.

2. Vom căuta expresia intensității curentului în cazul cînd la momentul $t = 0$ se aplică o tensiune constantă egală cu E_0. Deci tensiunea va fi dată de funcția

$$E(t) = E_0\, \theta(t). \tag{6}$$

Cu definiția admitanței avem

$$I = A * E. \tag{7}$$

Pe de altă parte, dacă notăm cu x_0 soluția elementară (nulă pentru $t < 0$) a ecuației (5), adică soluția ecuației

$$L\, x'' + Rx' + \frac{1}{C}\, x = \delta, \tag{8}$$

atunci admitanța A va fi

$$A = x * \delta' = x_0'. \tag{9}$$

Cu (6), (7) și (9) rezultă

$$I = A * E = (x_0 * \delta') * E = x_0 * (\delta' * E) = x_0 * E' =$$
$$= x_0 * (E_0\, \delta) = E_0\, x_0.$$

Este deci suficient să căutăm soluția elementară x_0.
Ecuația omogenă asociată lui (8) este

$$LCx'' + RCx' + x = 0.$$

Vom nota cu p_1, p_2 rădăcinile ecuației caracteristice

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0. \tag{10}$$

Vom presupune că circuitul nu se află în stare de amortizare critică :

$$R \neq 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Vom considera cazul cînd

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

adică

$$R^2 C^2 - 4 LC < 0.$$

Rădăcinile ecuației (10) sînt atunci complexe:

$$p_1 = \alpha + \beta i, \; p_2 = \alpha - \beta i,$$

unde

$$\alpha = -\frac{R}{2L}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Soluția generală $x(t)$ a ecuației diferențiale omogene este

$$x(t) = e^{\alpha t} (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t).$$

Căutînd soluția care verifică condițiile inițiale

$$x(0) = 0, \qquad x'(0) = \frac{1}{L},$$

găsim imediat

$$x(t) = \frac{1}{L\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Deci curentul căutat va fi:

$$(11) \qquad I(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ \dfrac{E_0}{L\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t & \text{pentru } t > 0. \end{cases}$$

3. În cazul unui circuit care conține numai self și capacitate (fig. 2), formula (11) devine

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ \dfrac{CE}{\sqrt{LC}} \sin \dfrac{t}{\sqrt{LC}} & \text{pentru } t > 0. \end{cases}$$

4. Să considerăm acum un RC-filtru de joasă frecvență, adică un cvadripol ca în figura 3.

Fie $u = u(t)$ tensiunea la „bornele de intrare" și $v = v(t)$ tensiunea la „bornele de ieșire". Prin metodele obișnuite ale

teoriei electricității se arată că legătura dintre aceste tensiuni este dată de ecuația diferențială:

(12) $$RCv' + v = u.$$

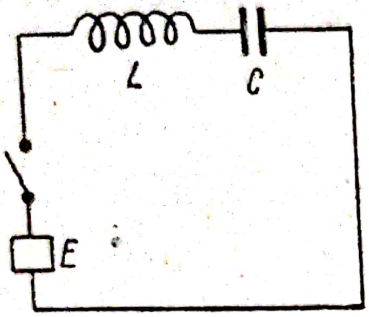


Fig. 2. — Circuit electric în self și capacitate.

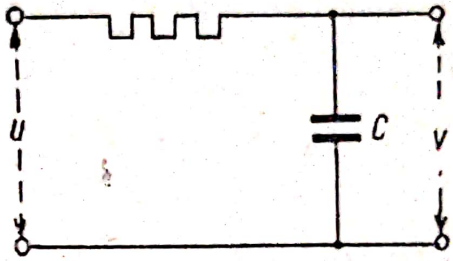


Fig. 3. — *RC*-filtru de joasă frecvență.

Se verifică ușor că funcția

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ \dfrac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}} & \text{pentru } t \geqslant 0 \end{cases}$$

este o soluție elementară a ecuației (12), adică o soluție a ecuației

(13) $$RC\, v' + v = \delta.$$

5. În cazul unui *RC*-filtru de înaltă frecvență (fig. 4), legătura dintre tensiuni este dată de ecuația

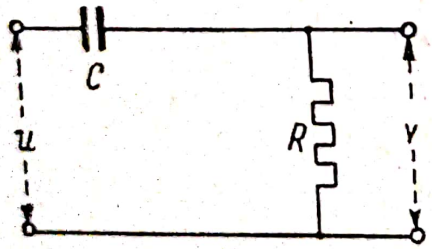


Fig. 4. — *RC*-filtru de înaltă frecvență.

(14) $$RCv' + v = RCu'.$$

Să presupunem că la bornele de intrare se aplică la momentul $t = 0$ tensiunea constantă u_0. Deci tensiunea de intrare este dată de funcția

$$u(t) = u_0\, \theta(t).$$

Deoarece funcția $h(t)$ este o soluție a ecuației (13), iar $u' = u_0\delta$, tensiunea $v(t)$ la bornele de ieșire va fi:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ u_0\, e^{-\frac{t}{RC}} & \text{pentru } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Să considerăm acum cazul general.

Ținînd seama că $h(t)$ este soluția elementară a ecuației (14), tensiunea $v(t)$ va fi

$$v = h * (RCu') = (RCh)' * u = h_1' * u = k * u$$

notînd $h_1 = RCh$ și $h_1' = k$, derivata fiind luată în sensul distribuțiilor.

Deoarece funcția

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ e^{-\frac{t}{RC}} & \text{pentru } t > 0 \end{cases}$$

are un salt în origine, egal cu unitatea, vom avea

$$h' = h_2 + \delta,$$

unde

$$h_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} & \text{pentru } t > 0. \end{cases}$$

Deci pentru tensiunea de intrare $u(t)$, tensiunea de ieșire $v(t)$ va fi dată de formula

$$v = k * u, \tag{15}$$

unde

$$k(t) = -\frac{\theta(t)}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} + \delta(t). \tag{16}$$

În cazul tensiunii constante (aplicată la momentul 0) cu (15) și (16) se găsește rezultatul de mai sus.

§ 3. Exemple de aplicații în optică

1. În optică se consideră așa-zisa variabilă luminoasă plană caracterizată printr-o funcție de repartiție $f(x, y)$. Dacă P este un punct în planul variabilei luminoase, iar ω aria unei porțiuni plane care conține acest punct, atunci această porțiune emite o undă a cărei amplitudine este aproximată de $f(P)\omega$.

Un caz particular important este acela cînd într-un plan se consideră unul sau mai multe puncte sursă. În cazul unei surse punctuale, repartiția variabilei luminoase ar trebui să fie nulă peste tot în afară de un singur punct în care valoarea sa nu este determinată. Deci ea nu se poate reprezenta printr-o funcție, dar va fi convenabil a o reprezenta printr-o distribuție.

În optică se consideră de asemenea așa-zisa figură de difracție la infinit $F(u, v)$, corespunzătoare unei variabile luminoase plane date de o repartiție $f(x, y)$. Pentru u și v convenabil de mici, $F(u, v)$ este transformata Fourier a lui $f(x, y)$ *).

Pentru o sursă punctuală, figura de difracție la infinit are o repartiție constantă în tot planul. Sursa punctuală va fi în acest caz reprezentată de distribuția lui Dirac, înmulțită cu o anumită constantă :

$$f(x, y) = \lambda \delta (x - x_0, y - y_0).$$

Pentru opticieni sursa punctuală poate fi considerată ca limita unei surse circulare a cărei rază tinde la zero, putîndu-se observa că atunci cînd diametrul sursei tinde la zero, figura de difracție se lărgește pînă cînd devine de luminație constantă.

2. Dacă se consideră ca sursă luminoasă o fantă a cărei lărgime se poate neglija, deci o sursă liniară, atunci repartiția variabilei luminoase va fi constantă de-a lungul unei drepte — direcția fantei — și va fi aceea a unei mase punctuale pe direcția perpendiculară fantei.

Pentru simplificare să presupunem că fanta este reprezentată de axa $0y$ și că repartiția de-a lungul axei este egală cu unu. Atunci repartiția variabilei luminoase va fi dată de un produs direct de distribuții și anume :

$$f(x, y) = \delta (x) \times \mathbf{1} (y).$$

Calculînd transformata Fourier a lui f ca în Cap. II, § 5, secțiunea 7, obținem distribuția

$$G(u, v) = \mathbf{1} (u) \times 2\pi \delta (v).$$

Aceasta arată că figura de difracție este o linie luminoasă perpendiculară fantei.

---

*) Se ia de fapt $F(u, v) = G(2\pi u, 2\pi v)$, unde $G(u, v)$ este transformata Fourier a lui $f(x, y)$.

Pentru o dreaptă paralelă cu axa Oy, deci de ecuație $x = a$, repartiția variabilei luminoase va fi

$$f(x, y) = \delta_a(x) \times \beta \mathbf{1}(y),$$

unde β este o constantă, iar pentru o dreaptă paralelă cu axa Ox, deci de ecuație $y = b$,

$$f(x, y) = \alpha \mathbf{1}(x) \times \delta_b(y),$$

unde α este de asemenea o constantă.

Să considerăm un sistem interferențial format din n puncte sursă situate pe axa Ox. Funcția de repartiție va fi de forma :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \delta(x - x_k).$$

Să considerăm de asemenea o funcție de repartiție $g(x)$. Atunci sistemul avînd funcția de repartiție

$$h(x) = (f * g)(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, g(x - x_k)$$

va avea figura de difracție la infinit dată de :

$$H(u) = F(u) \, G(u),$$

unde $F(u)$, $G(u)$ dau respectiv figurile de difracție pentru $f(x)$ și $g(x)$.

Să presupunem că suportul lui g este un interval a cărei lungime este astfel încît translațiile sale prin x_k nu se intersectează. Atunci h se deduce din f înlocuind fantele de lărgime neglijabilă prin fante de o anumită lărgime, fiecare din ele avînd aceeași repartiție de lumină g. Figura de interferență a lui h va fi figura de interferență a lui f, înmulțită cu figura de difracție a fiecărei fante.

3. Un sistem format din fante paralele de lărgime neglijabilă se poate studia considerînd cazul unui sistem format din puncte sursă situate pe o anumită dreaptă.

4. Un sistem format din fante paralele de lărgime neglijabilă care se află la aceeași distanță și au aceeași repartiție dă o figură de difracție la infinit periodică, perioada fiind inversa distanței dintre două fante succesive.

Sistemul poate fi considerat ca fiind dat de repartiţia :

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \delta(x-kl),$$

figura de difracţie fiind deci caracterizată de transformata Fourier a lui f, adică :

$$G(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iklu}$$

sau, luînd $F(u) = G(2\pi u)$ şi transformînd expresia,

$$F(u) = \frac{\sin(2n+1)\,\pi lu}{\sin \pi lu}.$$

În multe alte probleme ale difracţiei la infinit precum şi în alte probleme ale opticii intervin în mod natural distribuţiile şi transformatele lui Fourier. Nu putem intra aici în expunerea unor asemenea aplicaţii ale teoriei distribuţiilor deoarece ele ar necesita cunoştinţe mai detaliate din dome-

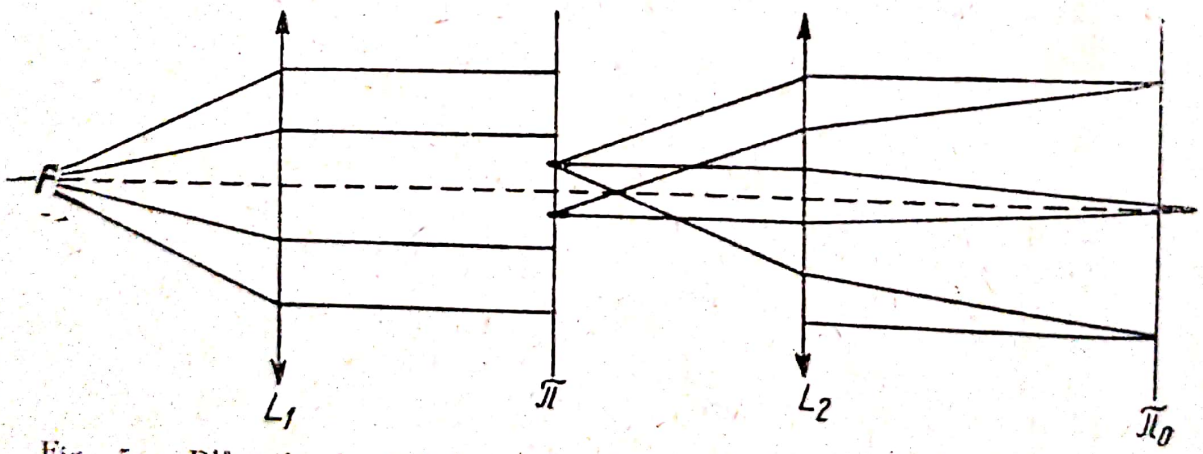


Fig. 5. — Difracţia la infinit realizată prin două lentile L_1, L_2 : F sursa luminoasă în focarul lentilei L_1 ; π plan cu fanta circulară ; π_0 plan focal.

niul opticii. Ne-am mulţumit mai mult de a semnala posibilitatea utilizării distribuţiilor în acest domeniu *).

*) Pentru alte aplicaţii în optică se poate consulta cartea lui J. Arsac [2].

Capitolul V

Ecuaţii cu derivate parţiale

În studiul ecuațiilor cu derivate parțiale, teoria distribuțiilor are numeroase aplicații, atît în cercetarea problemelor fundamentale care tind spre alcătuirea unei teorii generale a ecuațiilor cu derivate parțiale (pînă în prezent nu se poate vorbi despre o asemenea teorie), cît și în rezolvarea efectivă a unor forme destul de generale de ecuații.

Noi ne vom ocupa în special de-al doilea aspect, rezolvarea efectivă a ecuațiilor cu derivate parțiale. Pentru primul aspect recomandăm, dintr-o literatură foarte bogată, cărțile lui L. Schwartz [26], I. M. Gelfand și G. E. Șilov [10], [11], [12], L. Hörmander [16] etc.

§ 1. Soluții fundamentale pentru ecuațiile liniare cu coeficienți constanți

1. O ecuație liniară cu derivate parțiale, cu coeficienți constanți, este de forma

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) x = f, \tag{1}$$

unde P este un polimon în n variabile, iar f o distribuție oarecare, dată.

DEFINIȚIA 1. *Se numește soluție fundamentală pentru ecuația* (1), *orice soluție a ecuației*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) x = \delta, \tag{2}$$

unde $\delta = \delta_0$ *este distribuția lui Dirac în* n *dimensiuni.*

PROPOZIȚIA 1. *Dacă* e *este o soluție fundamentală pentru ecuația* (1) *și dacă expresia*

$$x = e * f \tag{3}$$

are sens, atunci această expresie definește o soluție a ecuației (1).

Demonstrație. Din proprietățile convoluției rezultă, dacă x este dat de formula (3),

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) x = P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right)(e * f) =$$

$$= \left[P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) e \right] * f = \delta * f = f.$$

2. În particular, convoluția (3) are sens pentru orice distribuție f cu suportul compact.

Se pune deci problema rezolvării ecuației (2).

Aplicînd transformarea Fourier ambilor membri ai acestei ecuații se obține

$$P(-it_1, \ldots, -it_n)\, \mathcal{F}x = 1 \tag{4}$$

deci problema se reduce la împărțirea cu polinomul P în spațiul Z^*.

S-a demonstrat (vezi I. M. Gelfand și G. E. Șilov [10] sau L. Hörmander [16]) că ecuația (4) are soluții, oricare ar fi polinomul P, de unde rezultă că există soluții fundamentale pentru orice ecuație de forma (1). Metoda de demonstrație nu conduce însă la un calcul efectiv al soluțiilor fundamentale.

În tratatul lui I. M. Gelfand și G. E. Șilov [13] sînt date metode de calcul efectiv în cazuri destul de generale. Noi redăm, fără demonstrație, numai unele cazuri particulare simple.

Ecuaţia lui Poisson în plan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = f$$

admite soluţia fundamentală

$$e = \frac{1}{2\pi} \ln (t_1^2 + t_2^2)^{-1/2}$$

iar ecuaţia lui Poisson în spaţiul cu n dimensiuni $(n>2)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2} = f$$

admite soluţia fundamentală

$$e = -\frac{1}{(n-2)\, S_n}(t_1^2 + \ldots + t_n^2)^{2-n},$$

unde S_n este suprafaţa sferei n-dimensionale de rază 1.

Mai general, ecuaţia

$$\Delta^m u = f,$$

unde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial t_n^2}$$

admite o soluţie fundamentală de forma

$$e = Cr^{2m-n} \ln r, \quad (r = (t_1^2 + \ldots + t_n^2)^{1/2}),$$

dacă $2m > n$ şi n este impar, şi

$$e = Cr^{2m-n}$$

în celelalte cazuri.

Observăm că în toate cazurile considerate de noi, soluţiile fundamentale sînt funcţii indefinit derivabile, definite pe tot R^n, cu excepţia originii. Ecuaţiile liniare cu derivate parţiale care admit asemenea soluţii fundamentale se numesc hipoeliptice. Se poate demonstra (vezi, de exemplu, G. Mari-

nescu [19]) că toate soluțiile ecuațiilor omogene hipoeliptice sînt funcții indefinit derivabile.

3. Cu ajutorul soluțiilor fundamentale se pot rezolva unele probleme la limită pentru ecuațiile de mai sus.

Noi vom arăta cum se pot determina potențialele de dublu strat și de simplu strat în cazul ecuației lui Laplace în trei dimensiuni :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} = 0.$$

(calculul este același pentru orice număr de dimensiuni).

Fie D un domeniu spațial, mărginit de suprafața S. Presupunem că sînt îndeplinite condițiile clasice ale lui Liapunov.

Ne punem problema să determinăm o funcție u, armonică în D, și în exteriorul lui D, avînd un salt $\sigma(t)$ de-a lungul suprafeței S și pentru care derivata normală exterioară pe suprafața S este egală cu derivata normală interioară.

Să notăm cu Δu laplacianul clasic al funcției u,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2}$$

și cu $\bar{\Delta} u$ laplacianul definit în sensul teoriei distribuțiilor de formula :

$$< \varphi, \bar{\Delta} u > = \iiint_{R^3} u \Delta \varphi \, dt_1 \, dt_2 \, dt_3,$$

unde φ este o funcție oarecare, indefinit derivabilă, și cu suportul compact. Pentru funcțiile φ, laplacianul definit în sensul teoriei distribuțiilor coincide cu cel clasic.

Să aplicăm formula lui Green funcțiilor u (presupunînd că există) și φ pe domeniul D și pe domeniul exterior lui D. Obținem

$$\iiint_D (u\Delta\varphi - \varphi\Delta u) \, dt_1 \, dt_2 \, dt_3 = \iint_S \left(u_i \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \right) dS$$

$$\iiint_{C_D} (u\Delta\varphi - \varphi\Delta u) \, dt_1 \, dt_2 \, dt_3 = - \iint_S \left(u_e \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \right) dS,$$

unde u_i și u_e sînt limitele funcției u la suprafața S dinspre interior, respectiv dinspre exterior.

Adunînd ultimele formule obținem relația

$$\iiint_{R^3} (u\Delta\varphi - \varphi\Delta u)\, dt_1\, dt_2\, dt_3 = \int_S \sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS,$$

unde σ este saltul $u_i - u_e$.

Ultima relație ne arată că diferența $\bar{\Delta}u - \Delta u$ dintre laplacienii funcției u este o distribuție g, dată de formula

$$<\varphi, g> = \int_S \sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS.$$

Atunci ecuația lui Laplace în sensul teoriei distribuțiilor:

$$\bar{\Delta}u = 0 \tag{5}$$

se scrie în sensul clasic

$$\Delta u = g. \tag{6}$$

O soluție a ecuației (6) este dată, cum am văzut mai sus, de formula

$$u = e * g, \tag{7}$$

unde e este o soluție fundamentală a laplacianului.

Convoluția (7) are sens, pentru că g este distribuție cu suportul compact. Ea se poate explicita, ținînd seama că e este funcție indefinit derivabilă peste tot, cu excepția originii.

Convoluția

$$(\varphi * e)(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \iiint_{R^3} \varphi(t_1 t_2, t_3)\, e\,(\tau_1 - t_1, \tau_2 - t_2, \tau_3 - t_3)\, d_1\, dt_2\, dt_3$$

este funcție indefinit derivabilă.

Atunci, prin definiție,

$$<\varphi, e * g> = <\varphi * e, g> = \iint_S \sigma \frac{\partial(\varphi * e)}{\partial n}\, dS.$$

Expresia $\frac{\partial (\varphi * e)}{\partial n}$ se poate calcula prin derivare sub integrală :

$$\frac{\partial (\varphi * e)}{\partial n}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) =$$

$$= \iiint_{R^3} \varphi(t_1, t_2, t_3) \frac{\partial e}{\partial n}(\tau_1 - t_1, \tau_2 - t_2, \tau_3 - t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3$$

de unde

$$< \varphi, e * g > = \iint_S \sigma(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \times$$

$$\times \left(\iiint_{R^3} \varphi(t_1, t_2, t_3) \frac{\partial e}{\partial n}(\tau_1 - t_1, \tau_2 - t_2, \tau_3 - t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3 \right) dS =$$

$$= \iiint_{R^3} \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \left[\iint_S \sigma(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial e}{\partial n}(\tau_1 - t_1, \tau_2 - t_2, \tau_3 - t_3)\, dS \right] dt_1\, dt_2\, dt_3.$$

Rezultă că $e * g$ este funcția :

$$u(t_1, t_2, t_3) = \iint_S \sigma(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \frac{\partial e}{\partial n}(\tau_1 - t_1, \tau_2 - t_2, \tau_3 - t_3)\, dS.$$

Regăsim astfel formula potențialului de dublu strat, care, de obicei, este dedusă din considerente de ordin fizic.

În mod analog se poate proceda și pentru potențialul de simplu strat : se caută o funcție v, armonică în D și în $\complement D$, continuă în tot planul și avînd un salt ν între derivata normală exterioară și derivata normală interioară pe suprafața S.

Formula lui Green ne dă în acest caz :

$$\iiint_{R^3} (v \Delta \varphi - \varphi \Delta v)\, dt_1 dt_2 dt_3 = \iint_S \nu \varphi\, dS.$$

De aici rezultă că problema potențialului de simplu strat revine la rezolvarea ecuației

$$\Delta u = r,$$

unde distribuția r (în trei dimensiuni) este dată de formula

$$< \varphi, r > = \iint_S \varphi r dS.$$

Repetînd raționamentul de mai sus, ajungem la formula

$$v(t_1, t_2, t_3) = \iint_S \nu(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\, e(\tau_1 - t_1, \tau_2 - t_2, \tau_3 - t_3)\, dS.$$

Se știe că problemele Dirichlet și Neuman se pot rezolva cu ajutorul potențialelor de dublu strat, respectiv de simplu strat, prin intermediul unor ecuații integrale de tip Fredholm.

4. Pentru problema Cauchy se poate defini soluția fundamentală cu ajutorul căreia se rezolvă direct această problemă.

Considerăm ecuația

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) u = 0, \tag{8}$$

unde P este un polinom în n variabile, de gradul m în raport cu prima variabilă. Vom presupune că n este funcție de variabila t_1, cu valori în spațiul distribuțiilor definite pe spațiul variabilelor $t_2, \ldots, t_n$.

Problema lui Cauchy constă în determinarea soluției ecuației (8), cu condițiile:

$$u(0, t_2, \ldots, t_n) = u_0(t_2, \ldots, t_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}(0, t_2, \ldots, t_n) = u_1(t_2, \ldots, t_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t_1^{m-1}}(0, t_2, \ldots, t_n) = u_{m-1}, (t_2 \ldots, t_n)$$

în care $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ sînt distribuții date.

DEFINIȚIA 2. *Se numește soluție fundamentală a problemei Cauchy enunțate, o soluție e a ecuației*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) e = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

cu condițiile

$$e(0, t_2, \ldots, t_n) = 0,$$

$$\frac{\partial e}{\partial t_1}(0, t_2, \ldots, t_n) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{m-2} e}{\partial t_1^{m-2}}(0, t_2, \ldots, t_n) = 0,$$

$$\frac{\partial^{m-1} e}{\partial t_1^{m-1}}(0, t_2, \ldots, t_n) = \delta.$$

Considerăm mai întîi cazul cînd $u_0 = 0, \ldots, u_{m-2} = 0$ și una cel puțin dintre distribuțiile e și u_{m-1} are suportul compact. Atunci

$$u = e * u_{m-1}$$

este o soluție a problemei Cauchy, pentru că e este prin ipoteză soluție a ecuației (8), de unde rezultă

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right)\left(e * u_{m-1}\right) =$$

$$= \left[P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) e\right] * u_{m-1} =$$

$$= 0 * u_{m-1} = 0$$

iar pentru $t_1 = 0$:

$$u(0, t_2, \ldots, t_n) = e(0, t_2, \ldots, t_n) * u_{m-1} = 0 * u_{m-1} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}(0, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial e}{\partial t_1}(0, t_2, \ldots, t_n) * u_{m-1} = 0 * u_{m-1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{m-2} u}{\partial t_1^{m-2}}(0, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^{m-2} e}{\partial t_1^{m-2}}(0, t_2, \ldots, t) * u_{m-1} = 0 * u_{m-1} = 0$$

$$\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t_1^{m-1}}(0, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^{m-1} e}{\partial t_1^{m-1}}(0, t_2, \ldots, t) * u_{m-1} = \delta * u_{m-1} = u_{m-1}.$$

În cazul general presupunem sau că soluția elementară e are suportul compact, sau că toate distribuțiile $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$, au suporturile compacte. Atunci rezolvarea problemei Cauchy se reduce la cazul precedent în modul următor :

Notăm cu $\bar{u}_1$ soluția cazului precedent, adică soluția problemei :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right)\bar{u}_0 = 0$$

$$\bar{u}_0(0, t_2, \ldots, t_n) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t_1}(0, t_2, \ldots, t_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{m-2}\bar{u}_0}{\partial t_1^{m-2}}(0, t_2, \ldots, t_n) = 0$$

$$\frac{\partial^{m-1}\bar{u}_0}{\partial t_1^{m-1}}(0, t_2, \ldots, t_n) = u_{m-2}.$$

Funcția $\bar{u}_1 = \dfrac{\partial \bar{u}_0}{\partial t_1}$ verifică și ea ecuația (8), pentru că

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right)u\right] = P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right).$$

Această funcție mai verifică și condițiile :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t_1}(0, t_2, \ldots, t_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{m-3}\bar{u}_1}{\partial t_1^{m-3}}(0, t_2, \ldots, t_n) = 0$$

$$\frac{\partial^{m-2}\bar{u}_1}{\partial t_1^{m-2}}(0, t_2, \ldots, t_n) = u_{m-2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum $\bar{u}_2$ soluția problemei :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right)\bar{u}_2 = 0$$

$$\bar{u}_2(0, t_2, \ldots, t_n) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t_1}(0, t_2, \ldots, t_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{m-2}\bar{u}_2}{\partial t_1^{m-2}}(0, t_2, \ldots, t_n) = 0$$

$$\frac{\partial^{m-1}\bar{u}_2}{\partial t_1^{m-1}}(0, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^{m-1}\bar{u}_1}{\partial t_1^{m-1}}(0, t_2, \ldots, t_n).$$

Diferența $\bar{u}_3 = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$ verifică relațiile :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right)\bar{u}_3 = 0$$

$$\frac{\partial^k \bar{u}_3}{\partial t_1^k}(0, t_2, \ldots, t_n) = 0 \text{ pentru } k \neq m-2$$

$$\frac{\partial^{m-2}\bar{u}_3}{\partial t_1^{m-2}}(0, t_2, \ldots, t_n) = u_{m-2}.$$

În acest mod obținem pentru fiecare $j = 0, \ldots, m-1$, o soluție a ecuației (8), satisfăcînd condițiile :

$$\frac{\partial^k u}{\partial t_1^k}(0, t_2, \ldots, t_n) = 0, \quad k \neq j, \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1$$

și

$$\frac{\partial^j u}{\partial t_1^j}(0, t_2, \ldots, t_n) = u_j.$$

Suma acestor soluții este o soluție a problemei Cauchy generale.

Scanned with OKEN Scanner

5. În teoria propagării căldurii se întîlnește formula lui Poisson :

$$(9) \qquad u(t, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi - \eta)^2}{4t}\right) \mu(\eta)\, d\eta,$$

unde $u(\xi, t)$ reprezintă temperatura punctului ξ la momentul t iar $\mu(\xi)$ temperatura inițială (pentru $t = 0$).

Formula (9) se poate scrie :

$$(10) \qquad u(t, \xi) = \mu(\xi) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right).$$

În formula (10) se poate presupune acum că μ este o distribuție cu suport compact, oarecare. Atunci membrul stîng va reprezenta o distribuție u_t depinzînd de parametrul t.

Vom arăta că distribuția u_t verifică ecuația căldurii

$$(11) \qquad \frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_t}{\partial \xi^2}$$

și condiția inițială

$$(12) \qquad u_0 = \mu.$$

Să notăm

$$(13) \qquad e_t(\xi) = e(t, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right), \quad (t > 0).$$

Avem

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu * e_t) = \mu * \frac{\partial}{\partial t} e_t$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\mu * e_t) = \mu * \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} e_t$$

de unde

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)(\mu * e_t) = \mu * \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) e_t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\equiv 0$$

şi deci

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)(\mu * e_t)=0.$$

Cu alte cuvinte distribuţia

$$u_t=\mu * e_t$$

verifică ecuaţia (23).

Să observăm acum că

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)=\delta(\xi), \tag{14}$$

limita fiind cea din spaţiul distribuţiilor.

Într-adevăr,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)d\xi=1,$$

deci pentru orice $t>0$ şi orice numere reale $\alpha<\beta$ avem

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)d\xi\leqslant 1.$$

Dacă punem

$$\eta=\frac{\xi}{\sqrt{t}},$$

atunci pentru $\alpha<0<\beta$ avem

$$\lim_{t\to 0}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)d\xi=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}}^{\frac{\beta}{\sqrt{t}}}\exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)d\eta=1.$$

Pentru orice număr $\beta > 0$ avem

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\beta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi < \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\beta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\frac{2t}{\beta}\, d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{t}}{\beta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4t}\right)$$

deci

$$\lim_{t\to 0}\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi = 0.$$

Se verifică de asemenea că

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi = 0$$

oricare ar fi $\alpha > 0$.

În baza celor arătate în secțiunea 4, § 2, are loc (14).

Rezultă

$$u_0 = \lim_{t\to 0} u_t = \lim_{t\to 0} (\mu * e_t) =$$

$$= \mu * \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\right) = \mu * \delta = \mu.$$

Deci u_t verifică condiția (12).

Am arătat deci că în cazul ecuației căldurii (11), o soluție fundamentală a problemei Cauchy este funcția e, dată de formula (13).

Soluția ecuației (11) cu condiția inițială (12) este $u_t = \mu * e_t$. Dacă $\mu(\xi)$ este o funcție sumabilă cu suport compact, atunci soluția este dată de funcția (9).

6. Pentru ecuația coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2},$$

o soluție fundamentală a problemei Cauchy este dată de funcția

$$e(t_1, t_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{pentru } t_1 > |t_2|, \\ 0 & \text{pentru } t_1 < |t_2|. \end{cases}$$

Se verifică ușor condițiile din definiția soluției fundamentale, prin derivare în sensul distribuțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Aplicarea transformării Fourier parțiale

1. O metodă practică de rezolvare a ecuațiilor cu derivate parțiale constă în aplicarea transformării Fourier în raport cu o parte din variabile. În acest mod sînt rezolvate, în general, problemele în cartea lui I. Sneddon [29].

Metoda se poate folosi și pentru studiul teoretic al problemei Cauchy (vezi I. M. Gelfand și G. E. Șilov [12]).

Considerăm ecuația

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) u = f, \tag{1}$$

unde P este un polinom în n variabile, iar u și f sînt funcții de variabila t_1, cu valori distribuții definite pe spațiul variabilelor $t_2, \ldots, t_n$.

Presupunem că operația de derivare în raport cu t_1 este definită în sensul funcțiilor cu valori în spațiul vectorial al distribuțiilor, cu relația de convergență definită în Cap. II.

Atunci ecuația (1) este o ecuație diferențială obișnuită, cu coeficienți operatori în spațiul distribuțiilor.

Dacă aplicăm transformarea Fourier valorilor funcțiilor u și f, în spațiul distribuțiilor de variabilele $t_2, \ldots, t_n$, operațiile de derivare în raport cu aceste variabile se transformă în înmulțiri cu variabilele respective, deci ecuația (1) se transformă într-o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți (în raport cu t_1).

În cele ce urmează vom da cîteva exemple de rezolvare efectivă prin această metodă.

2. Fie ecuația

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}, \quad a > 0, \tag{2}$$

cu condițiile inițiale

$$u(0, t_2) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t_1}(0, t_2) = u_1,$$

unde u_0 și u_1 sînt distribuții în variabila t_2.

Dacă notăm cu $\tilde{u}$ transformata Fourier a distribuției u (în raport cu t_2), ecuația (2) devine

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t_1^2} + s^2 \tilde{u} = 0, \tag{3}$$

unde s este variabila complexă care corespunde lui t_2 în transformarea Fourier. Pentru simplificarea scrierii vom nota $t_1 = t$. Ecuația (3) se mai scrie atunci sub forma :

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + s^2 \tilde{u} = 0. \tag{4}$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$\tilde{u} = e^{ias t} C_1 + e^{-ias t} C_2,$$

unde C_1 și C_2 sînt două funcționale liniare continue pe spațiul $Z(s)$ (format din funcții analitice de variabila s, care satisface condițiile din Cap. II). Produsele cu funcțiile $e^{ias t}$ și $e^{-ias t}$ au sens pentru aceste funcționale.

Fie $\tilde{u}_0$ și $\tilde{u}_1$ transformatele Fourier ale distribuțiilor inițiale u_0 și u_1. Condițiile inițiale se transformă în :

$$C_1 + C_2 = \tilde{u}_0$$
$$ias\, C_1 - ias\, C_2 = \tilde{u}_1$$

de unde

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_0 + \frac{1}{ias}\tilde{u}_1\right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_0 - \frac{1}{ias}\tilde{u}_1\right).$$

Transformata Fourier a soluției problemei date este deci :

$$\tilde{u} = \frac{1}{2} e^{ias t}\left(\tilde{u}_0 + \frac{1}{ias}\tilde{u}_1\right) + \frac{1}{2} e^{-ias t}\left(\tilde{u}_0 - \frac{1}{ias}\tilde{u}_1\right).$$

Soluția însăși, adică distribuția u este dată de formula

$$u = \frac{1}{2}\left[u_0(t_2 + at_1) + u_0(t_2 - at_1) + U(t_2 + at_1) - U(t_2 - at_1)\right],$$

unde U este o primitivă a distribuției u_1.

Într-adevăr, produsul cu funcția exponențială $e^{i\lambda s}$ provine, prin transformarea Fourier, din translația în punctul λ iar împărțirea cu $+$ is din primitivă.

Dacă u_1 este funcția local integrabilă, atunci soluția are forma clasică a lui D'Alembert:

$$u = \frac{1}{2}[u_0(t_2 + at_1) + u_0(t_2 - at_1)] + \frac{1}{2}\int_{t_2-at_1}^{t_2+at_1} u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

3. Să considerăm acum ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial t_2^4} = 0, \qquad a > 0$$

cu condițiile

$$u(0, t_2) = u_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t_1}(0, t_2) = a u_1',$$

unde u_0 și u_1 sînt două distribuții date (în t_2), iar u_1' reprezintă derivata a doua a distribuției u_1, în sensul distribuțiilor.

Procedînd la fel ca în exemplul precedent, obținem ecuația diferențială

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t_1^2} + a^2 s^4 \tilde{u} = 0.$$

Soluția generală reală a acestei ecuații este

$$\tilde{u} = \cos(a s^2 t_1)\, C_1 + \sin(a s^2 t_1)\, C_2,$$

unde C_1 și C_2 au aceeași semnificație ca în exemplul precedent.

Condițiile inițiale se transformă în

$$C_1 = \tilde{u}_0, \quad + a s^2 C_2 = - a s^2 \tilde{u}_1,$$

deci transformata Fourier a soluției este

$$\tilde{u} = \cos(a s^2 t_1)\, \tilde{u}_0 - \sin(a s^2 t_1)\, \tilde{u}_1.$$

Aplicînd transformarea Fourier inversă funcțiilor $\cos(as^2 t)$ și $\sin(as^2 t)$, obținem, respectiv, funcțiile:

$$f_1 = \frac{1}{2(2\pi a t_1)^{1/2}}\left(\cos\frac{t_2^2}{4 a t_1} + \sin\frac{t_2^2}{4 a t_1}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$f_2 = \frac{1}{2\,(2\pi\, at_1)^{1/2}} \left(\cos \frac{t_2^2}{4\, at_1} - \sin \frac{t_2^2}{4\, at_1} \right).$$

Soluția problemei date va fi atunci

$$u = f_1 * u_0 - f_2 * u_1.$$

4. În cazul ecuației undelor în trei dimensiuni

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} = 0$$

cu condițiile

$$u\,(0\,, t_2, t_3) = u_0; \quad \frac{\partial u}{\partial t_1}\,(0, t_2\,, t_3) = u_1\,,$$

problema se rezolvă în același mod; dificultăți se întîlnesc numai la inversarea transformării Fourier.

Ecuația diferențială obținută prin transformarea Fourier:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t_1^2} + a^2\,(s_1^2 + s_2^2)\,\tilde{u} = 0$$

are soluția generală

$$\tilde{u} = \cos\,(at_1 \sqrt{s_1^2 + s_2^2})\; C_1 + \sin\,(at_1 \sqrt{s_1^2 + s_2^2})\; C_2.$$

Ținînd seama de condițiile inițiale, transformata Fourier a problemei date este

$$\tilde{u} = \cos\,(at_1 \sqrt{s_1^2 + s_2^2})\; \tilde{u}_0 + \frac{1}{a\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \sin\,(at_1 \sqrt{s_1^2 + s_2^2})\; \tilde{u}_1.$$

Transformatele Fourier inverse ale coeficienților distribuțiilor $\tilde{u}_0$ și $\tilde{u}_1$ nu există în sensul funcțiilor. În sensul distribuțiilor, ele sînt date de funcțiile:

$$f_1 = \frac{1}{-2\,\pi\, a} \frac{\partial}{\partial t_1}\,(a^2 t_1^2 - t_2^2 - t_3^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f_2 = \frac{1}{-2\,\pi a}\,(a^2 t_1^2 - t_2^2 - t_3^2)^{-\frac{1}{2}},$$

pentru $a^2t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 > 0$, și

$$f_1 = f_2 = 0 \text{ pentru } a^2t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 \leqslant 0.$$

Soluția căutată va fi atunci

$$u = f_1 * u_0 + f_2 * u_1.$$

Dacă u_0 și u_1 sînt funcții local sumabile:

$$u = -\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\iint_D \frac{(\tau, \sigma)\,d\tau\,d\sigma}{\sqrt{a^2t_1^2 - (t_2-\tau)^2 - (t_3-\sigma)^2}} -$$

$$-\frac{1}{2\pi a}\iint_D \frac{(\tau, \sigma)\,d\tau\,d\sigma}{\sqrt{at_1^2 - (t_2-\tau)^2 - (t_3-\sigma)^2}}$$

unde D este domeniul $at_1^2 - t_2^2 - t_3^2 > 0$ (în planul variabilelor t_2, t_3).

§ 3. Utilizarea seriilor trigonometrice

1. În problemele care comportă distribuții cu suportul compact este mai convenabil să se utilizeze dezvoltarea acestor distribuții în serii trigonometrice.

Să considerăm, de exemplu, ecuația coardei vibrante

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}, \quad a > 0,$$

cu condițiile

$$u(0, t_2) = u_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t_1}(0, t_2) = u_1$$

$$u(t_1, 0) = u(t_1, \pi) = 0.$$

Aici u poate fi considerat ca o funcție de t_1 cu valori distribuții în variabila t_2, avînd suportul inclus în segmentul $0 \leqslant t_2 \leqslant \pi$.

Pentru orice valoare a lui t_1, distribuția u se poate descompune în serie de sinusuri

$$u_{t_1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt_2), \tag{1}$$

unde coeficienţii b_n sînt daţi de formula

$$b_n(t_1) = \int_0^{\pi} < \sin nt_2,\ u_{t_1} > \mathrm{d}t_2$$

(în paranteza de sub integrală este valoarea distribuţiei u_{t_1} pentru funcţia $\sin nt_2$).

Derivata $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}$ a seriei (1) este seria

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2 b_n}{\mathrm{d}t_1^2} \sin (nt_2),$$

iar derivata $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}$ este seria

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 b_n) \sin (nt_2).$$

De aici rezultă că pentru orice n, coeficienţii b_n verifică ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}^2 b_n}{\mathrm{d}t_1^2} + n^2 a^2 b_n = 0, \quad (t = t_1). \tag{2}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (2) este

$$b_n = C_1(n) \cos (n\,at) + C_2(n) \sin (n\,at).$$

Dezvoltînd în serie de sinusuri şi condiţiile iniţiale:

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_0(n) \sin (n\,t_2), \quad u_0(n) = < \sin (nt_2),\ u_0 >$$

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_1(n) \sin (nt_2), \quad u_1(n) = < \sin (nt_2),\ u_1 >$$

determinăm constantele $C_1(n)$ şi $C_2(n)$, astfel încît coeficienţii b_n ai soluţiei căutate au expresia

$$b_n = u_0(n) \cos (n\,at) + \frac{1}{\pi\, na}\, u_1(n) \sin (n\,at)$$

de unde

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_0(n) \sin(nt_2) \cos(n\,at_1) +$$

$$+ \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_1(n)}{n} \sin(nt_2) \sin(n\,at_1).$$

Dacă u_0 și u_1 sînt funcții local integrabile :

$$u_0(n) = \int_0^{\pi} u_0(\tau) \sin(n\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$u_1(n) = \int_0^{\pi} u_1(\tau) \sin(n\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Dacă la momentul $t_1 = 0$ coarda era în poziția de echilibru și a primit un impuls $\mathcal{J}$ în punctul $t_2 = b$, $0 < b < \pi$, atunci distribuțiile u_0 și u_1 sînt, respectiv, 0 și $\frac{\mathcal{J}}{\rho} \delta_b(t_2)$, de unde

$$u = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nt_1) \sin(nt_2) < \sin(nt_2), \frac{\mathcal{J}}{\rho} \delta_0 > =$$

$$= \frac{2\mathcal{J}}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nb)}{n} \sin(nt_1) \sin(nt_2).$$

2. În mod analog se rezolvă problema unei plăci vibrante dreptunghiulare D de laturi $0 \leqslant t_2 \leqslant a$, $0 \leqslant t_3 \leqslant b$ în planul (t_1, t_2). Ecuația ei este de forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} = \frac{1}{T} P(t_1, t_2, t_3).$$

Dacă presupunem că pe laturile dreptunghiului D, $u = 0$ pentru orice t_1, atunci u poate fi considerat ca o distribuție cu suportul în D, funcție de t_1.

Dezvoltarea în serie de sinusuri

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u(m, n) \sin \frac{m\pi t_2}{a} \sin \frac{n\pi t_3}{b}$$

ne conduce la ecuațiile

$$\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2 u(m,n)}{\mathrm{d}t^2}+\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)u(m,n)=\frac{1}{T}P(m,n).$$

Dacă luăm $P=0$ și condițiile inițiale :

$$u(0,t_2,t_3)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t_1}(0,t_2,t_3)=u_1$$

obținem

$$u=\frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}u_0(m,n)\sin\left(\frac{m\pi t_2}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi t_3}{b}\right)\cos(\mu_{mn}ct_1)+$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi t_2}{a}\sin\frac{n\pi t_3}{b}n_1(m,n)\frac{\sin(\pi\mu_{mn}ct_1)}{(\sin^2 b^2+n^2a^2)^{1/2}},$$

unde

$$\mu_{mn}=\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2}.$$

În cazul $u_0=0$ și a unui impuls $\mathcal{J}$ exercitat perpendicular pe planul dreptunghiului în punctul (p,q), la momentul $t_1=0$, coeficienții $u_0(m,n)$ sînt nuli, iar

$$u_1(m,n)=\frac{\mathcal{J}}{\sigma}\sin\frac{m\pi p}{a}\sin\frac{n\pi q}{b}.$$

Se poate concepe și un impuls exercitat de-a lungul unei linii, de ecuație

$$t_3=l(t_2),\quad \alpha<t_0<\beta.$$

Distribuția care reprezintă acest impuls, este descrisă de formula :

$$<\varphi,\ \delta_l>=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t_2,l(t_2))\,\mathrm{d}t_2,$$

deci coeficienții $u_1(m,n)$ vor fi :

$$u_1(m,n)=\frac{\mathcal{J}}{\sigma}\int_{\alpha}^{\beta}\sin\frac{m\pi\tau}{a}\sin\frac{n\pi l(\tau)}{b}\,\mathrm{d}\tau.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

Aplicaţii în calculul probabilităţilor

Scopul principal al acestui capitol este de a introduce procese stocastice generalizate. Astfel de procese intervin în unele probleme puse de tehnică.

§ 1. Variabile aleatoare, funcţii de repartiţie, densităţi, funcţii caracteristice

1. Pentru definiţia variabilelor aleatoare, folosim axiomatica lui A. M. Kolmogorov.

În această axiomatică se consideră o mulţime Ω, numită mulţimea evenimentelor elementare şi o familie $\mathcal{B}$ de părţi ale mulţimii Ω, satisfăcînd următoarele condiţii :

1) Familia $\mathcal{B}$ conţine mulţimea vidă $\emptyset$ şi mulţimea totală Ω.

2) Dacă $A \in \mathcal{B}$, atunci şi $\mathbf{C}A \in \mathcal{B}$.

3) Dacă mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ aparţin familiei $\mathcal{B}$, atunci şi reuniunea lor aparţine familiei $\mathcal{B}$.

Pentru unele simplificări, se poate presupune că mulţimea Ω este dotată cu o topologie de spaţiu local compact şi că familia $\mathcal{B}$ conţine mulţimile deschise (de aici rezultă că $\mathcal{B}$ conţine toate mulţimile boreliene).

Presupunem că pe $\mathcal{B}$ s-a definit o măsură de probabilitate, sau simplu, o probabilitate P, adică o funcţie cu valori reale pozitive sau nule, cu următoarele proprietăţi :

P_1. $P(\Omega) = 1$;

P_2. Dacă mulțimile $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ sînt disjuncte două cîte două, adică $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$, atunci

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Cu aceste convenții, se numește *variabilă aleatoare* orice aplicație x a mulțimii Ω în mulțimea numerelor reale, dacă este îndeplinită condiția $x^{-1}((-\infty, t)) \in \mathcal{B}$ (adică mulțimea tuturor punctelor $\omega \in \Omega$, pentru care $x(\omega) < t$, aparține familiei $\mathcal{B}$) pentru orice t real.

Cînd nu se specifică altfel, se presupune că toate variabilele aleatoare despre care se vorbește sînt definite pe aceeași mulțime Ω și cu aceeași probabilitate definită pe familia $\mathcal{B}$. Sistemul (Ω, B, P) se mai numește și cîmp de probabilitate.

Variabilei aleatoare x i se atașează o funcție F de variabilă reală, definită prin relația

$$F(t) = P(x^{-1}(-\infty, t)) = P(x(\omega) < t). \tag{1}$$

Vom numi funcția F *funcția de repartiție* a variabilei aleatoare x. Menționăm că se întrebuințează mai des termenul de funcție de distribuție, însă noi nu-l putem folosi pentru că noțiunea de distribuție are, în această carte, un sens mult mai larg.

În schimb, noi vom încadra funcțiile de repartiție în teoria distribuțiilor.

Orice funcție de repartiție F definește o distribuție f (în sensul atribuit în primul capitol) prin formula:

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dF(t), \qquad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{2}$$

Distribuția f definită de formula (2) o vom numi *densitatea de repartiție* sau, mai simplu, *densitatea variabilei aleatoare* x.

Remarcăm că densitățile de repartiție nu sînt, în general, distribuții de tip funcție, date de formula (3), Cap. II, § 4, în care integrala este riemanniană, ci sînt date prin integrale de tip Stieljes, binecunoscute în teoria probabilităților.

Remarcăm, de asemenea, că distribuția f, dată de formula (2) nu este definită numai pentru funcțiile φ care aparțin

spațiului D, ci pentru toate funcțiile φ continue și cu suportul compact, deci pentru toate elementele spațiului C_0. Continuitatea funcționalei f în C_0 rezultă imediat din proprietățile integralei Rieman-Stieltjes : Se știe că

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\, dF(t)\right| \leqslant \sup_{t\in[a,\,b]} |\varphi(t)|\, V(F),$$

de unde rezultă că dacă funcțiile $\varphi_n \in C_0$ au suporturile incluse în același segment $[a, b]$ și converg uniform către zero, pe acest segment, atunci $<\varphi_n, f>$ converge către zero. De aici rezultă, în mod evident, și continuitatea funcționalei f în spațiul $\mathcal{D}$.

Orice funcție de repartiție F este local integrabilă, deci definește o distribuție prin formula

$$<\varphi, F> = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, F(t)\, dt.$$

Densitatea f nu este altceva decît derivata, în sensul distribuțiilor, a distribuției definită de F. Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$<\varphi, F'> = -<\varphi', F> = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(t)\, F(t)\, dt =$$

$$= -\varphi' F \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dF(t) = <\varphi, f>$$

(formula integrării prin părți se aplică și integralei Stieltjes; a se vedea, de exemplu, E. H. Gohman [14], p. 72).

2. *Exemple.* 1° Un prim exemplu de funcție de repartiție este dat de funcția lui Heaviside :

$$F(t) = \theta(t) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t \leqslant 0, \\ 1 \text{ pentru } t > 0. \end{cases}$$

Densitatea definită de această funcție prin formula (2) este distribuția δ :

$$<\varphi, f> = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d\theta(t) = \varphi(0)\,[\theta(0_+) - \theta(0_-)].$$

2° Dacă variabila aleatoare x poate lua valorile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ respectiv cu probabilitățile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$), atunci distribuția

$$f = \sum_{k=1}^{n} p_k \, \delta (t - a_k)$$

reprezintă densitatea de repartiție a lui x.

3° Foarte des întîlnită în calculul probabilităților este repartiția normală, a cărei densitate este dată de o funcție indefinit derivabilă cu descreșterea rapidă :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t - m}{\sigma} \right)^2 \right].$$

În această formulă m și σ sînt doi parametri, $-\infty < m < +\infty$, $\sigma > 0$ care reprezintă, respectiv, media și dispersia repartiției de densitate f.

Funcția de repartiție este în acest caz

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s - m}{\sigma} \right)^2 \right] ds.$$

4° Repartiția uniformă pe intervalul (a, b) are densitatea

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a} & \text{pentru } a < t < b, \\ 0 & \text{pentru } t < a \text{ sau } t > b. \end{cases}$$

Se mai poate scrie

$$f(t) = \frac{1}{b - a} [h(t - a) - h(t - b)].$$

Funcția de repartiție este, evident,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } -\infty < t \leqslant a, \\ \dfrac{t - a}{b - a} & \text{pentru } a < t < b, \\ 1 & \text{pentru } b \leqslant t < +\infty. \end{cases}$$

5° Repartițiile discrete sînt date de obicei prin funcții definite numai pentru valorile întregi ale variabilei t. Densitățile lor pot fi exprimate cu ajutorul distribuției δ.

Cele mai importante sînt :

a) Repartiția binomială, de densitate :

$$f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} \delta_k, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \quad q = 1 - p.$$

b) Repartiția Poisson, de densitate :

$$f = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k, \quad \lambda > 0.$$

Funcțiile de repartiție vor fi deci, respectiv,

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} h(t-k) \qquad \text{pentru repartiția binomială,}$$

$$F(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} h(t-k) \qquad \text{pentru repartiția Poisson.}$$

Observație. Dacă $f \in \mathcal{D}'$ și dacă $<\varphi, f> \geqslant 0$ pentru orice $\varphi \geqslant 0$ ($\varphi \in \mathcal{D}$), se scrie $f \geqslant 0$.

Se poate arăta că o distribuție f este o densitate de repartiție dacă și numai dacă $f \geqslant 0$ și $<1, f> = 1$.

Dacă f are suport mărginit, atunci $<1, f>$ are evident sens. Dacă f nu are suport mărginit, atunci vom lua

$$<1, f> = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1 \\ \varphi \in \mathcal{D}}} <\varphi, f>.$$

Dacă f și g sînt două distribuții, atunci din $f, g \geqslant 0$ rezultă $f * g \geqslant 0$; din $<1, f> = 1$ și $<1, g> = 1$ rezultă $<1, f * g> = 1$.

Deci dacă f și g sînt densități de repartiție ale unor variabile aleatoare x, y respectiv, atunci și distribuția $f * g$ este o densitate de repartiție și anume densitatea variabilei $x + y$.

6° Transformata Fourier a unei densități f este o funcție continuă $\tilde{f}$, definită de formula

$$\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i s t} \, dF(t). \tag{3}$$

Într-adevăr, prin definiție, transformata Fourier $\tilde{f}$ este dată de formula

$$(4) \qquad <\tilde{\varphi}, \tilde{f}> = 2\pi <\varphi, f>,$$

unde φ este un element oarecare din spațiul $\mathcal{D}$ și $\tilde{\varphi}$ transformata Fourier a funcției φ.

Să arătăm că expresia (3) verifică relația (4):

$$<\tilde{\varphi}, \tilde{f}> = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(s) \left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, dF(t)} \right) ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}\, dF(t) \right) ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}\, \tilde{\varphi}(s)\, ds \right) dF(t) =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dF(t) = 2\pi <\varphi, f>.$$

De aici rezultă că distribuția $\tilde{f}$ este dată de funcția (3). Invers, deoarece funcția $\tilde{f}$ este continuă, ea este unic determinată de relația (3).

Dacă densitatea unei variabile aleatoare, considerată ca distribuție, se poate extinde asupra funcției t^m, valoarea corespunzătoare se numește momentul de ordin m al variabilei aleatoare. Valoarea aceasta este dată, evident, de expresia

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m\, dF(t) = \int_{\Omega} [x(\omega)]^m\, dP(\omega).$$

Momentul de primul ordin se mai numește și media sau speranța matematică a variabilei aleatoare. Vom nota cu $Ex = \bar{x}$ media variabilei x:

$$Ex = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dF(t) = \int_{\Omega} x(\omega)\, dP(\omega).$$

În calculul probabilităților se mai consideră și momentele centrate:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{x})^m dF(t) = \int_{\Omega} [x(\omega) - \bar{x}]^m\, dP(\omega).$$

Este evident că momentul centrat de primul ordin este nul. Momentul centrat de ordinul al doilea se mai numește și dispersia variabilei aleatoare și se notează de obicei cu litera σ^2 :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{x})^2 \, dF(t) = \int_{\Omega} [x(\omega) - \bar{x}]^2 \, dP(\omega).$$

7° Mulțimea variabilelor aleatoare care au media și dispersia finite formează un spațiu vectorial cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari obișnuite pentru funcție. Expresia

$$(x|y) = \int_{\Omega} x(\omega) \overline{y(\omega)} \, dP(\omega) \tag{5}$$

este o formă hermitiană definită pe acest spațiu, satisfăcînd și condiția $(x|x) > 0$. Să notăm

$$\|x\| = (x|x)^{1/2}. \tag{6}$$

Mulțimea claselor de echivalență ale acestui spațiu față de relația de echivalență $\|x - y\| = 0$ formează un spațiu hilbertian $\mathcal{H}$, în care expresia (5) definește produsul scalar, iar norma este dată de expresia (6).

Observăm că, în conformitate cu notațiile din Cap. I, § 3, spațiul hilbertian $\mathcal{H}$ al variabilelor aleatoare care au media și dispersia finite este $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Fără a restrînge generalitatea, se poate presupune că media variabilelor aleatoare considerate este nulă. Se obține astfel un subspațiu hilbertian al lui $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P) = \mathcal{H}$, subspațiu pe care îl vom nota cu $\mathcal{H}_0$. În $\mathcal{H}_0$ norma coincide cu valoarea medie pătratică.

$$\|x\| = \sigma.$$

Convergența în $\mathcal{H}$ și deci și în $\mathcal{H}_0$ este numită convergența în medie pătratică. În mod analog sînt definite și noțiunile care depind de această convergență, de exemplu continuitatea funcțiilor cu valori în $\mathcal{H}$, derivabilitatea lor, integrala etc.

Măsurile Z cu valori în $\mathcal{H}$, considerate în Cap. I, § 3, le vom numi măsuri aleatoare.

8° Un sistem finit de variabile aleatoare $x_1, \ldots, x_n$ poate fi considerat ca o aplicație a mulțimii Ω în spațiul n-dimensional R^n. O asemenea aplicație se numește o variabilă aleatoare n-dimensională.

Funcția

$$F(t_1, \ldots, t_n) = P(x_1(\omega) < t_1, \ldots, x_n(\omega) < t_n)$$

se numește funcția de repartiție a variabilei $(x_1, \ldots, x_n)$.

Pentru sistemele mixte de variabile aleatoare se definesc momentele mixte prin formula

$$\alpha_{r_1, \ldots, r_n} = \int_{R^n} t_1^{r_1} \cdot t_2^{r_2} \ldots t_n^{r_n} \, dF(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \int_\Omega [x_1(\omega)]^{r_1} \cdot [x_2(\omega)]^{r_2} \ldots [x_n(\omega)]^{r_n} \, dP(\omega)$$

și momentele centrate prin formula

$$\mu_{r_1, \ldots, r_n} = \int_{R^n} (t_1 - \bar{x}_1)^{r_1} \ldots (t_n - \bar{x}_n)^{r_n} dF(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \int_\Omega [x_1(\omega) - \bar{x}_1]^{r_1} \ldots [x_n(\omega) - \bar{x}_n]^{r_n} \, dP(\omega)$$

§ 2. Procese stocastice generalizate

1. Prin proces stocastic se înțelege, în mod obișnuit, o funcție $x(t, \omega)$ cu valori reale sau complexe de două variabile dintre care una parcurge o mulțime de numere reale, iar cealaltă parcurge mulțimea Ω a unui cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Pentru fiecare t din mulțimea de numere reale considerată se presupune că aplicația $\omega \to x(t, \omega)$ este o variabilă aleatoare, în sensul definiției din paragraful precedent. Rezultate mai importante se obțin numai dacă se impun condiții restrictive atît variabilelor aleatoare considerate, cît și dependenței de variabila t. În aplicație se presupune de multe ori că variabila t parcurge un interval finit sau infinit al dreptei reale, iar variabilele aleatoare considerate au media și dispersia finită, funcția $t \to x(t, \omega) = x_t(\omega)$ este considerată de obicei continuă în raport cu spațiul hilbertian $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ al variabilelor aleatoare care au media și dispersia finite, organizat cu produsul scalar :

$$(1) \qquad (x/y) = \int_\Omega x(\omega) \overline{y(\omega)} \, dP(\omega) = Ex\bar{y}.$$

Cum am amintit și în § 1, în multe probleme este suficient să considerăm subspațiul $\mathcal{H}_0$ al lui $\mathcal{H}$, format de elementele cu media nulă.

Noțiunea de funcție continuă cu valori în spațiul hilbertian $\mathcal{H}$ poate fi generalizată prin aceea de distribuție cu valori în $\mathcal{H}$. Această generalizare o luăm noi ca o definiție pentru procesele stocastice generalizate. *)

DEFINIȚIA 1. *Numim proces stocastic generalizat orice distribuție cu valori în $\mathcal{H}$, adică orice aplicație liniară și continuă a spațiului $\mathcal{D}$ în $\mathcal{H}$.*

2. Procesele stocastice obișnuite pe care le-am amintit mai sus intră în această definiție. Într-adevăr, dacă $t \to x(t)$ este o funcție continuă definită pe dreapta reală și cu valori în $\mathcal{H}$, atunci ea definește o aplicație liniară și continuă a lui $\mathcal{D}$ în $\mathcal{H}$ prin formula

$$T\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, x(t)\, dt, \qquad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{2}$$

Integrala din această formulă are întotdeauna sens, pentru că limitele ei sînt, cînd se fixează φ, finite (extremitățile suportului lui φ). Liniaritatea operației T este evidentă, iar continuitatea rezultă imediat din inegalitatea

$$\| T\varphi \| = \| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, x(t)\, dt \| = \| \int_a^b \varphi(t)\, x(t)\, dt \| \leqslant$$

$$\leqslant (b-a) \max_{t \in [a,b]} |\varphi(t)| \max_{t \in [a,b]} \| x(t) \|,$$

unde a, b sînt extremitățile suportului funcției φ: dacă $\varphi_n \to 0$ în $\mathcal{D}$, suporturile funcțiilor φ_n sînt mărginite și

$$\max_{t \in R} |\varphi_n(t)| \to 0, \quad \text{deci} \quad \| T\varphi_n \| \to 0.$$

Șirurile de variabile aleatoare $\{x_n\}$ cu $x_n \in \mathcal{H}$ de asemenea intră în definiția 1 prin formula

$$T\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)\, x_n. \tag{3}$$

*) Se mai dau și alte definiții ale proceselor stocastice generalizate.

Un exemplu de proces stocastic generalizat, care nu se încadrează în formulele (2) sau (3), se obține în modul următor : fie a o variabilă aleatoare, aparținînd spațiului $\mathcal{H}$; expresia

$$T\varphi = \varphi(a) \tag{4}$$

definește o aplicație liniară și continuă a spațiului $\mathcal{D}$ în $\mathcal{H}$. Într-adevăr, o dată cu a, și $\varphi(a)$ este o variabilă aleatoare, cu media

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, dF(\tau),$$

unde $F(\tau)$ este funcția de repartiție a variabilei a și cu dispersia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tau)|^2\, dF(\tau).$$

Cele două integrale sînt finite pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, deci $T\varphi \in \mathcal{H}$. Liniaritatea și continuitatea sînt evidente.

3. Elementele de forma $T\varphi$ cu $\varphi \in \mathcal{D}$, unde T este un proces stocastic generalizat, formează un subspațiu liniar al lui $\mathcal{H}$. Vom nota cu $\mathcal{H}(T)$ și vom numi spațiu hilbertian generat de T închiderea acestui subspațiu în $\mathcal{H}$. În cele ce urmează vom arăta că spațiul $\mathcal{H}(T)$ este izomorf și izometric cu un spațiu hilbertian de distribuții.

DEFINIȚIA 2. *Numim corelația procesului T funcționala*

$$K(\varphi, \psi) = ET\varphi\,\overline{T\psi} = (T\varphi \mid T\psi).$$

Ținînd seama de proprietățile produsului scalar, rezultă imediat că funcționala aceasta este hermitiană și pozitiv definită. Putem deci aplica rezultatele din Cap. I, § 5 : funcționala K este distribuția reproduizantă a unui spațiu hilbertian $\mathcal{H}(K)$, generat de distribuțiile $K_\varphi : \psi \to K_\varphi(\psi) = K(\varphi, \psi)$.

Pentru prescurtare vom spune că spațiul $\mathcal{H}(K)$ este generat de funcționala K. Produsul scalar în acest spațiu este

$$(K_\varphi \mid K_\psi) = K(\varphi, \psi).$$

TEOREMA 1. *Spațiile $\mathcal{H}(T)$ și $\mathcal{H}(K)$, generate, respectiv, de procesul T și de corelația acestui proces, sînt izomorfe și izometrice.*

Demonstrație. Oricărui element $T\varphi$ din $\mathcal{H}(T)$ îi corespunde elementul K_φ din $\mathcal{H}(K)$. Corespondența $T_\varphi \to K_\varphi$ este liniară, pentru că elementului

$$aT\varphi + bT\psi = T(a\varphi + b\psi),$$

îi corespunde elementul

$$K_{a\varphi+b\psi} = aK_\varphi + bK_\psi.$$

Această corespondență păstrează și produsul scalar:

$$(T\varphi \mid T\psi) = K(\varphi, \psi) = (K_\varphi \mid K_\psi).$$

De aici rezultă $\|T\varphi\| = \|K_\varphi\|$, deci corespondența este biunivocă, pentru că $K_\varphi = 0$ implică $T\varphi = 0$.

4. Teorema 1 ne dă o reprezentare a proceselor stocastice generalizate prin distribuții.

Aplicînd în continuare rezultatele obținute în Cap. I, obținem o reprezentare integrală.

TEOREMA 2. *În condițiile teoremei 1, presupunem că funcționala K este de forma*

$$K(\varphi, \psi) = \int_Q f_\varphi(q)\overline{f_\psi(q)}\,d\mu(q),$$

unde $(Q, \mathcal{B}, \mu)$ este un spațiu cu măsură, iar $\varphi \to f_\varphi$ este aplicație liniară și continuă a spațiului $\mathcal{D}$ în $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$. Atunci spațiul hilbertian $\mathcal{H}(T)$ generat de procesul T, este izomorf și izometric cu subspațiul hilbertian generat de elementele f_φ $(\varphi \in \mathcal{D})$ în $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$.

Dacă elementele f_φ $(\varphi \in \mathcal{D})$ generează întreg spațiul $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$, atunci există o măsură aleatoare Z, astfel încît

$$T\varphi = \int_Q f_\varphi dZ, \qquad (\varphi \in \mathcal{D})$$

și orice element din $\mathcal{H}(T)$ este de forma

$$h = \int_Q g dZ,$$

cu g unic determinat în $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$.

Demonstrație. Prima parte a teoremei este o consecință imediată a propoziției 4 din Cap. I, § 5, pentru că, în condițiile enunțate, spațiul $\mathcal{H}(K)$ este generat de elementele f_φ $(\varphi \in \mathcal{D})$.

Dacă, în plus, $\mathcal{H}(K)$ coincide cu $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ atunci el conține funcțiile caracteristice χ_B ale părților lui Q, care aparțin familiei $\mathcal{B}$. Să notăm cu $Z(B)$ elementul care corespunde în $\mathcal{H}(T)$ funcției χ_B prin izomorfismul $T\varphi \longleftrightarrow K_\varphi = f_\varphi$.

Deoarece elementele $\chi_B \in L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$ generează și ele întreg spațiul $L^2(Q, \mathcal{B}, \mu)$, rezultă că elementele $Z(B) \in \mathcal{H}(T)$ generează întreg spațiul $\mathcal{H}(T)$, deci în acest caz, spațiul $\mathcal{H}(T)$ coincide cu spațiul $L^2(Z)$, considerat în Cap. I, § 3.

5. Pentru procesele stocastice generalizate reale se pot introduce noțiuni analoge cu cele definite pentru sistemele finite de variabile aleatoare.

DEFINIȚIE. *Numim moment de ordinul q al procesului stocastic generalizat T, funcționala q-liniară*

$$\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_q) = ET\varphi_1 \ldots T\varphi_q$$

și moment centrat de ordinul q, funcționala

$$\mu(\varphi_1, \ldots, \varphi_q) = E[T\varphi_1 - <\varphi_1, m>] \ldots [T\varphi_q - <\varphi_q, m>],$$

unde prin $<\varphi, m>$ am notat valoarea distribuției m, dată de formula

$$<\varphi, m> = E\, T\varphi.$$

Distribuția m se numește media procesului T.

§ 3. Procesele staționare

1. Staționaritatea este definită, pentru procesele stocastice obișnuite, prin invarianța funcțiilor de repartiție $F(t_1, \ldots, t_n)$, ale sistemelor finite $(x(t_1) \ldots, x(t_n))$, față de translații.

Cînd se cere invarianța acestor funcții pentru orice n, procesul este numit staționar în sens restrîns. În practică însă, intervine o staționaritate în sens larg, pentru care nu se impune condiția de invarianță decît în cazul $n = 1$ și 2.

Noi extindem la procesele generalizate staționaritatea în sens larg, fără să mai menționăm cuvintele „în sens larg".

DEFINIȚIA 1. *Fie T un proces stocastic generalizat în sensul definiției 1 din § 2. Spunem că T este un proces staționar dacă pentru orice număr real τ sînt satisfăcute condițiile:*

1) $$<\varphi(t+\tau), m> = <\varphi(t), m>$$

2) $$K(\varphi(t+\tau), \psi(t+\tau)) = K(\varphi(t), \psi(t)).$$

(Am întrebuințat scrierea improprie în care apar variabilele funcțiilor φ și ψ, pentru a preciza că în partea stîngă a acestor relații, distribuțiile se aplică funcțiilor obținute prin translația cu τ).

În cartea [13] de I. M. Gelfand și N. Ja. Vilenkin, este demonstrată următoarea propoziție, pe care o dăm fără demonstrație.

PROPOZIȚIA 1. *Corelația oricărui proces staționar este de forma:*

$$K(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\lambda)\, \overline{\widetilde{\psi}(\lambda)}\, d\sigma(\lambda), \tag{1}$$

unde σ este o măsură pe dreaptă, cu creștere polinomială, iar $\widetilde{\varphi}$ este transformata Fourier a funcției φ:

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \varphi(t)\, dt.$$

Procesele staționare se încadrează deci în teorema 2, § 2, de unde deducem:

PROPOZIȚIA 2. *Orice proces staționar este de forma:*

$$T\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\lambda)\, dZ(\lambda), \tag{2}$$

unde Z este o măsură aleatoare.

Ultima egalitate se mai poate scrie

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dZ(\lambda), \tag{3}$$

adică T este transformata Fourier a măsurii Z.

Într-adevăr,

$$T\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \varphi(t)\, dt \right) dZ(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dZ(\lambda) \right) \varphi(t)\, dt$$

de unde rezultă formula (3).

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

Aplicaţii la sisteme dinamice liniare

Prin *sistem dinamic* se înţelege un sistem fizic a cărei stare variază sub influenţa unor acţiuni exterioare. Locul în care se poate aplica o acţiune asupra sistemului se numeşte *intrare*, iar locul în care se poate măsura răspunsul sistemului la acţiunea dată, se numeşte *ieşire*.

Acţiunea la intrarea sistemului se numeşte şi *semnal de intrare*, iar răspunsul sistemului se numeşte *semnal de ieşire*. Semnalele unui sistem dinamic sînt de obicei funcţii de timp. După cum vom vedea, este convenabil a admite ca semnale şi distribuţii (scalare) sau distribuţii aleatoare. Vom vedea, de asemenea, că indiferent de natura semnalelor, un sistem dinamic este caracterizat de o anumită funcţie sau distribuţie.

Teoria distribuţiilor este aparatul cel mai potrivit pentru studiul sistemelor dinamice.

§ 1. Sisteme dinamice liniare

1. Un exemplu simplu de sistem dinamic cu o intrare şi o ieşire este dat de un cvadripol electric, de exemplu de un RC-filtru de joasă frecvenţă (fig. 1). Intrarea sistemului este dată de bornele de intrare a_1, b_1 ale cvadripolului, iar ieşirea de bornele de ieşire a_2, b_2. Ca semnal de intrare se aplică o tensiune $x(t)$ la bornele de intrare; semnalul de ieşire va fi tensiunea $y(t)$ la bornele de ieşire.

Se pot considera și sisteme dinamice cu mai multe intrări și ieșiri. Sistemele automate sînt formate din sisteme dinamice avînd una sau mai multe intrări și una sau mai multe ieșiri.

În cele ce urmează, cînd nu vom face nici o mențiune, sistemul dinamic considerat va fi presupus cu o intrare și o ieșire. Un astfel de sistem se reprezintă ca în figura 2.

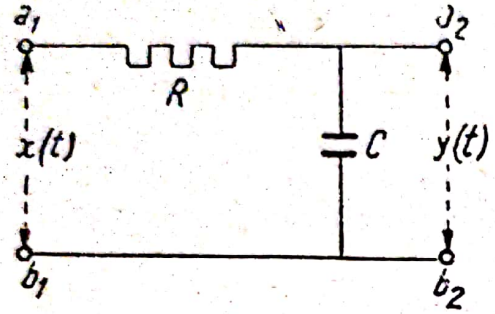


Fig. 1. — RC — filtru de joasă frecvență.

Un sistem dinamic $\mathcal{U}$ este caracterizat de un operator U, legătura dintre semnale scriindu-se deci sub forma :

$$y = U(x)$$

Operatorul U aplică o mulțime X de funcții sau de distribuții (semnale de intrare) într-o mulțime Y (de asemenea de funcții sau de distribuții).

Vom presupune că X și Y sînt spații liniare.

Sistemul $\mathcal{U}$ se zice *sistem dinamic liniar*, dacă operatorul U este liniar.

Lanțurile electrice pasive pot fi considerate practic ca sisteme dinamice liniare.

Să considerăm cazul sistemului dinamic din figura 1. În Cap. IV am menționat că legătura dintre tensiuni este dată de ecuația diferențială liniară :

$$RCy'(t) + y(t) = x(t). \tag{1}$$

Considerînd soluția elementară $h(t)$ a acestei ecuații, dată în Cap. IV, legătura dintre semnale este

$$y = h * x. \tag{2}$$

Semnalele sînt presupuse aici ca fiind tensiuni care acționează de la un anumit moment t_0, adică funcții $x(t)$ nule pentru $t < 0$. Sistemul se presupune că se află în condiții inițiale nule. Obținem astfel un exemplu de sistem dinamic liniar.

În formula (2) x poate fi considerată și ca o distribuție cu suport mărginit la stînga. De exemplu este util a admite ca semnal distribuția lui Dirac. Răspunsul sistemului la acest semnal va fi însăși funcția $h(t)$.

Să considerăm acum un RC-filtru cu rezistența variabilă $R(t)$ (care se reprezintă ca în fig. 3). Presupunînd de exemplu că $R(t)$ este o funcție continuă, avem ecuația

$$R(t).C\,y' + y = x$$

care descrie funcționarea sistemului dinamic considerat.

Fig. 2. — Sistem dinamic cu o intrare și o ieșire.

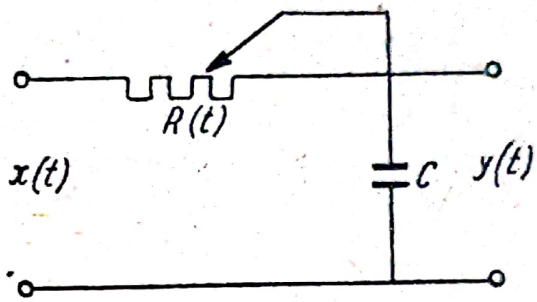


Fig. 3. — RC — filtru cu rezistență variabilă R (t).

Pentru ecuația

$$R(t).C\,(y)' + y = 0$$

soluția $e\,(t, s)$ care satisface condiția

$$e\,(s,s) = \frac{1}{R(s).C}$$

este

$$e(t, s) = \frac{1}{R(s).C} \exp\left[-\int_s^t \frac{\mathrm{d}\xi}{R(\xi).C}\right]. \tag{3}$$

Funcția

$$w\,(t, s) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < s \\ e\,(t, s) & \text{pentru } t \geqslant s \end{cases} \tag{4}$$

este atunci o soluție a ecuației

$$R\,(t).C\,y' + y = \delta_s.$$

Dacă sistemul se află în stare de repaus pînă la momentul t_0 și dacă $x(t)$ este o tensiune nulă pînă la momentul t_0, atunci răspunsul sistemului se poate pune sub forma

$$y\,(t) = \int_{t_0}^{t} w\,(t, s)\,x\,(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dacă admitem ca semnale și distribuțiile, atunci legătura dintre semnale se va scrie cu ajutorul operatorului generat de familia $W = \{w(t, s)\}_{s \in R}$.

2. Fie $\mathcal{U}$ un sistem dinamic liniar. Fie X mulțimea semnalelor de intrare, iar Y mulțimea semnalelor de ieșire. Vom presupune că X și Y sînt subspații liniare ale spațiului distribuțiilor $\mathcal{D}'$.

Operatorul U al sistemului este deci un operator liniar definit pe X, cu valori în Y.

Pentru aplicații este util a presupune că operatorul liniar U este într-un anumit sens și continuu, mai precis, că este generat de o anumită familie $W = \{w_s\}_{s \in R}$ de distribuții:

$$U(x) = W \circ x.$$

În acest caz W se va numi *ponderea* (sau admitanța) sistemului. Se va zice că ponderea este *normală*, dacă W este o familie normală.

Pentru ca un sistem dinamic să fie fizic realizabil va trebui presupus că el are o pondere normală.

În exemplul precedent, ponderea normală a sistemului era dată de formulele (4) și (3). În acest caz ponderea se reduce chiar la o familie de funcții. Vom vedea însă mai departe exemple imediate de sisteme dinamice pentru care ponderea este o familie de distribuții care nu sînt definite de funcții.

3. Un sistem de dirijare automată este de obicei compus din mai multe sisteme dinamice cuplate între ele.

Să considerăm cazul sistemelor cu o intrare și o ieșire.

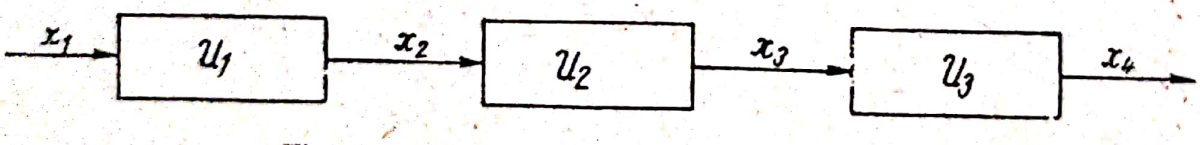


Fig. 4. — Sisteme dinamice cuplate în serie.

Două sau mai ulte sisteme se zic cuplate în serie, dacă ieșirea fiecărui sistem este legată cu intrarea sistemului următor (fig. 4).

Fie $\mathcal{W}_1$ și $\mathcal{W}_2$ două sisteme cuplate în serie și fie $\mathcal{W}$ sistemul echivalent obținut (fig. 5). Fie $W_1 = \{w_s^1\}_{s \in R}$ și $W_2 = \{w_s^2\}_{s \in R}$ respectiv ponderile celor două sisteme cuplate și fie $W = \{w_s\}_{s \in R}$ ponderea sistemului $\mathcal{W}$. Dacă x este semnalul de

intrare al sistemului $\mathcal{W}_1$, iar y semnalul corespunzător de ieșire, atunci

$$y = W_1 \circ x.$$

Pentru sistemul $\mathcal{W}_2$, y este semnalul de intrare, și fie z semnalul corespunzător de ieșire. Atunci

$$z = W_2 \circ y.$$

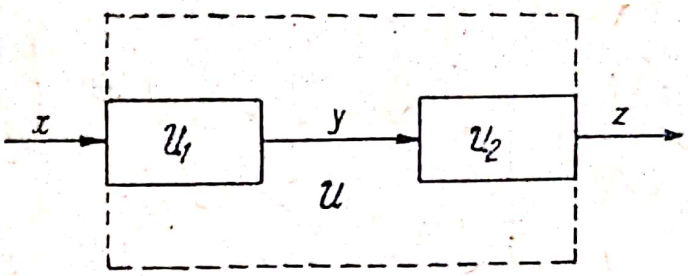


Fig. 5. — Sisteme cuplate în serie și sistemul echivalent obținut.

Deci

$$z = W_2 \circ (W_1 \circ x). \tag{5}$$

Pe de altă parte :

$$z = W \circ x. \tag{6}$$

Pentru $x = \delta_s$, din (6) rezultă $z = w_s$. Punînd $x = \delta_s$ în (5) se obține

$$z = W_2 \circ (W_1 \circ \delta_s) = W_2 \circ w_s^1$$

deci

$$w_s = W_2 \circ w_s'. \tag{7}$$

Reciproc, sistemul avînd ponderea dată de familia distribuțiilor de forma (7), este echivalent cu sistemele cuplate $\mathcal{W}_1$ și $\mathcal{W}_2$ deoarece (Cap. II, § 4) :

$$W \circ x = \{W_2 \circ w_s^1\}_{s \in R} \circ x = W_2 \circ (W_1 \circ x) = W_2 \circ y = z.$$

Două sau mai multe sisteme se zic cuplate în paralel, dacă la intrările tuturor sistemelor acționează unul și același

semnal, iar semnalele de ieșire se urmează și formează un semnal de ieșire comun (fig. 6).

Dacă $\mathcal{W}_1$ și $\mathcal{W}_2$ sînt două sisteme dinamice avînd respectiv ponderile $W_1 = \{w_s^1\}_{s\in R}$ și $W_2 = \{w_s^2\}_{s\in R}$, atunci sistemul $\mathcal{W}$

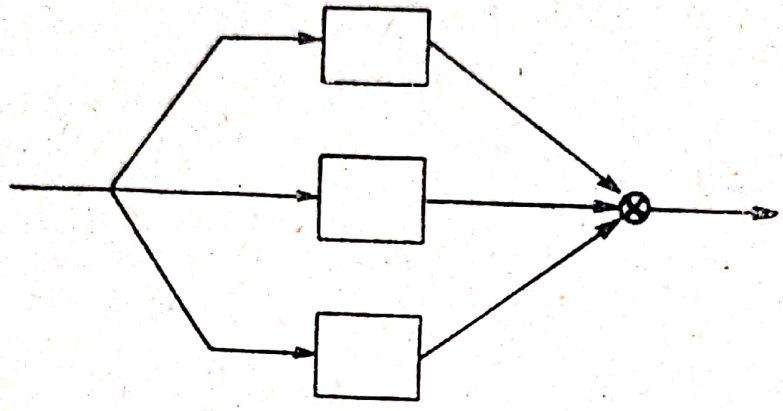


Fig. 6. — Sisteme cuplate în paralel.

obținut prin cuplarea lor în paralel are ponderea $W = \{w_s^1 + w_s^2\}_{s\in R}$.

Un sistem $\mathcal{V}$ se zice că este invers unui sistem dat $\mathcal{W}$, dacă cuplate în serie formează un sistem identic, adică semnalul de ieșire al sistemului total este identic cu semnalul de intrare (fig. 7).

Dacă $\mathcal{W}$ are ponderea $W = \{w_s\}_{s\in R}$ iar $\mathcal{V}$ are ponderea $V = \{v_s\}_{s\in R}$, atunci cele două sisteme cuplate în serie vor constitui un sistem avînd ponderea $\Delta = \{\delta_s\}_{s\in R}$.

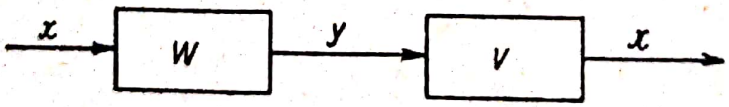


Fig. 7. — Sistem dinamic și inversul său cuplate în serie.

Deci

$$V \circ w_s = \delta_s, \qquad (s \in R). \tag{8}$$

Astfel găsirea sistemului invers lui $\mathcal{W}$ se reduce la găsirea familiei V care verifică (8).

Vom vedea că în anumite cazuri familia V se găsește imediat.

4. Fie $\mathcal{W}$ un sistem dinamic liniar avînd o intrare și o ieșire. Semnalele vor fi presupuse distribuții cu suport mărginit la stînga.

Vom presupune că legătura dintre semnalul x de intrare și semnalul y de ieșire este dat de ecuația diferențială.

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(t)\, D^{n-k} y = x. \tag{9}$$

Presupunem pentru simplificare că $b(t), b_1(t), \ldots, b_n(t)$ sînt funcții indefinit derivabile, iar $b_0(t)$ nu se anulează.

Fie $x = \delta_s$ ca semnal de intrare și să notăm prin w_s răspunsul normal al sistemului adică soluția ecuației

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(t)\, D^{n-k} y = \delta_s$$

care se anulează pentru $t < s$. Am văzut în Cap. III cum se găsește o astfel de soluție.

Familia $\{w_s\}_{s\in R}$ va fi ponderea sistemului.

Sistemul dinamic invers sistemului $\mathcal{W}$ va avea ponderea

$$V = B\Delta,$$

unde B este operatorul diferențial din membrul stîng al lui (9) și ca de obicei $\Delta = \{\delta_s\}_{s\in R}$.

Într-adevăr, avem

$$(B\Delta)\circ w_s = B(\Delta \circ w_s) = B\, w_s = \delta_s.$$

5. Să considerăm acum un sistem $\mathcal{W}$ descris de o ecuație de forma :

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(t)\, D^{n-k} y = \sum_{j=0}^{m} a_j(t)\, D^{m-j} x, \tag{10}$$

unde $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t), b_0(t), b_1(t), \ldots, b_n(t)$ sînt presupuse, pentru simplificare, funcții indefinit derivabile, iar $b_0(t)$ nu se anulează.

Sistemul $\mathcal{W}$ poate fi considerat ca obținut prin cuplarea în serie a două sisteme : sistemul $\mathcal{U}$ avînd x ca semnal de intrare și al cărui semnal de ieșire este dat de

$$z = \sum_{j=0}^{m} a_j(t)\, D^{m-j} x; \tag{11}$$

sistemul $\mathcal{O}$ avînd z ca semnal de intrare şi al cărui semnal de ieşire y se află cu z în relaţia dată de ecuaţia

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(t)\, D^{n-k} y = z. \tag{12}$$

Ponderea U a sistemului $\mathcal{U}$ este dată (cu (11)) de familia de distribuţii

$$u_s = \sum_{j=0}^{m} a_j(t)\, D^{m-j}\, \delta_s .$$

Dacă $V = \{v_s\}_{s\in R}$ este ponderea sistemului $\mathcal{O}$, unde v_s se găseşte cu ajutorul ecuaţiei (12) prin metoda pe care o cunoaştem, atunci ponderea lui $\mathcal{W}$ este dată de familia de distribuţii $W = \{U \circ v_s\}_{s\in R}$.

În cazul sistemului dinamic descris de o ecuaţie de forma (10), ponderea sistemului nu mai este o familie de funcţii decît în cazul cînd $m < n$. În paragraful următor vom vedea că în cazul coeficienţilor constanţi sîntem conduşi la pondere date de distribuţii, dacă $m \geqslant n$.

6. În teoria sistemelor automate se folosesc şi aşa-zisele *sisteme cu legătură inversă*. Un astfel de sistem este reprezentat în figura 8. Asupra sistemului acţionează un semnal x, dar şi semnalul de ieşire y influenţează starea sistemului, semnalul efectiv de intrare fiind $e = x - y$ numit semnal eroare. Semnalul x se mai numeşte şi semnal de comandă.

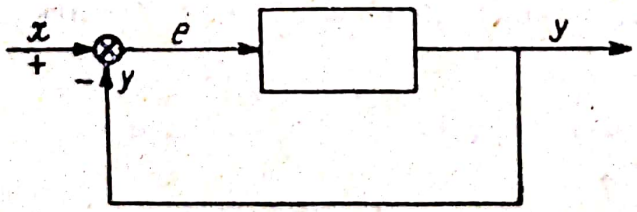


Fig. 8. — Sistem cu legătură inversă.

Dacă legătura dintre semnalul de ieşire şi semnalul de eroare este dat de o ecuaţie diferenţială de forma (10) (în care se înlocuieşte x prin e), atunci ponderea sistemului se poate găsi ca mai sus. Este suficient să observăm că relaţia dintre semnale se poate spune sub forma :

$$(A + B)y = Ax$$

dacă notăm prin A și B cei doi operatori diferențiali care intervin în ecuația (10).

7. Ecuațiile considerate la punctele 4—6 au fost presupuse cu coeficienți funcții indefinit derivabile. Putem considera și cazul cînd coeficienții au derivate continue numai pînă la un anumit ordin, sau că sînt numai funcții continue.

În acest caz semnalele de intrare vor fi presupuse distribuții de ordin finit.

§ 2. Sisteme staționare. Sisteme cu semnale aleatoare

1. Fie $\mathcal{W}$ un sistem dinamic liniar cu ponderea $W = \{w_s\}_{s \in R}$. Sistemul se zice *staționar* dacă există o distribuție $w \in \mathcal{D}$, așa ca $w_s = \tau_s w$.

În acest caz legătura dintre semnale devine

$$y = w * x$$

iar distribuția w însăși se va numi ponderea sistemului. Ea reprezintă răspunsul sistemului cînd la intrare acționează ca semnal distribuția lui Dirac. Condiția ca ponderea să fie normală este în acest caz condiția ca w să aibe suportul pe semiaxa pozitivă. Vom presupune ca și în paragraful precedent că semnalele sînt distribuții cu suport mărginit la stînga.

Un RC-filtru de joasă frecvență este un exemplu simplu de sistem staționar. Ponderea este o distribuție de tip funcție :

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ \dfrac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}} & \text{pentru } t \geqslant 0 \end{cases}$$

după cum am văzut mai înainte.

Un alt exemplu simplu de sistem staționar este dat de un RC-filtru de înaltă frecvență. În acest caz ponderea este o distribuție care nu mai este de tip funcție și anume (a se vedea Cap. IV, § 1) :

$$w(t) = -\frac{\theta(t)}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}} + \delta(t),$$

unde θ este funcția lui Heaviside.

În cele ce urmează, un sistem dinamic liniar și staționar va fi numit pe scurt sistem staționar.

2. Fie acum $\mathcal{W}_1$ și $\mathcal{W}_2$ două sisteme staționare cuplate în serie și $\mathcal{W}$ sistemul echivalent obținut. Fie w_1, w_2, respectiv ponderile sistemelor $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$. Atunci ponderea w a sistemului $\mathcal{W}$ va fi

$$w = w_2 * w_1$$

Dacă sistemele $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ sînt cuplate în paralel, atunci ponderea sistemului obținut va fi :

$$w = w_2 + w_1.$$

Dacă $\mathcal{V}$ este un sistem staționar, invers unui sistem dat $\mathcal{W}$ și dacă w este ponderea lui $\mathcal{W}$, atunci ponderea v a lui $\mathcal{V}$ este distribuția care verifică egalitatea

$$v * w = \delta.$$

3. Un sistem dinamic multidimensional este un sistem dinamic cu m intrări și n ieșiri. El se reprezintă ca în figura 9, unde $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt semnale de intrare la cele m intrări, iar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt semnale corespunzătoare de ieșire la cele n ieșiri.

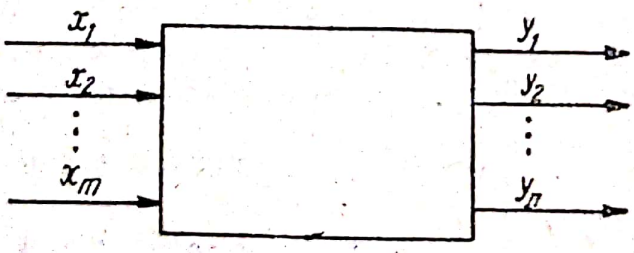


Fig. 9. — Sistem dinamic multidimensional cu m intrări și n ieșiri.

Să presupunem că $\mathcal{W}$ este un sistem dinamic ale cărui semnale sînt distribuții cu suport mărginit la stînga.

Să punem

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Se poate vorbi și în acest caz de sistem liniar și staționar și de ponderea sistemului, care în acest caz va fi o matrice de distribuții :

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \dots w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} \dots w_{2m} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_{n1} & w_{n2} \dots w_{nm} \end{pmatrix}.$$

Legătura dintre semnale se va scrie

$$y = W * x,$$

unde în membrul al doilea avem produsul a două matrici în care se înlocuiește $w_{ij}x_j$ prin $w_{ij} * x_j$.

Ca un exemplu simplu, să considerăm două RC-filtre cu intrare comună (fig. 10).

Tensiunea de intrare este notată cu x iar tensiunile de ieșire cu y_1 și y_2.

Tensiunile sînt legate prin ecuațiile :

$$R_1C_1y_1' + y_1 = x,$$
$$R_2C_2y_2' + y_2 = x.$$

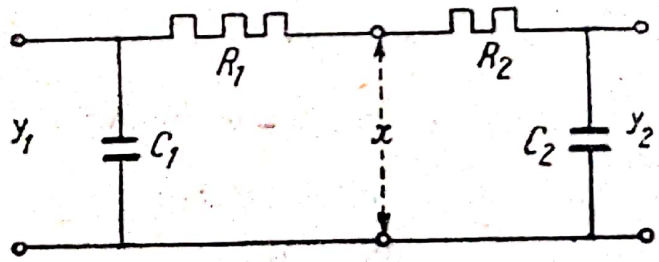


Fig. 10. — Două RC — filtre cu intrare comună.

Avem un sistem dinamic cu o intrare și două ieșiri. Ponderile sistemului sînt

$$w_1(t) = \frac{1}{R_1C_1}\,\theta(t)\exp\left(-\frac{t}{R_1C_1}\right),$$

$$w_2(t) = \frac{1}{R_2C_2}\,\theta(t)\exp\left(-\frac{t}{R_2C_2}\right).$$

Sistemul dinamic considerat este un sistem staționar caracterizat de o matrice pondere cu o singură coloană

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

ale cărei elemente sînt funcții.

Folosind filtre de înaltă frecvență putem obține un model de sistem multidimensional a cărui matrice pondere este formată din distribuții (care nu sînt diferite prin funcții).

4. Fie $\mathcal{W}$ un sistem dinamic (cu o intrare și o ieșire), x semnalul de intrare, y semnalul de ieșire. Să presupunem că legătura dintre semnale este dată de ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți :

$$\sum_{k=0}^{n} b_k D^{n-k} y = x.$$

Atunci sistemul este staționar, iar soluția elementară a ecuației, care se anulează pentru $t < 0$, este ponderea sistemului.

Să presupunem acum că legătura dintre semnale este dată de ecuația

$$\sum_{k=0}^{n} b_k D^{n-k} y = \sum_{j=0}^{m} a_j D^{m-j} x. \tag{1}$$

Să notăm cu A și B cei doi operatori diferențiali care intervin în această ecuație.

Fie $g(t)$ soluția ecuației diferențiale :

$$By = 0$$

care verifică condițiile :

$$g^{(k)}(0) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2),$$

$$g^{(n-1)}(0) = \frac{1}{b_0}.$$

Atunci funcția

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ g(t) & \text{,, } t \geqslant 0 \end{cases}$$

este ponderea sistemului descris de ecuația

$$B\,y = z$$

Ponderea sistemului descris de ecuația

$$z = A\,x$$

este

$$u = A\,\delta.$$

Ponderea sistemului descris de ecuația (1) va fi

$$w = v * u = v * (A\,\delta) = A\,v.$$

Dacă $m < n$, atunci Av este o funcție.

Dacă însă $m \geqslant n$, atunci Av nu este o funcție deoarece discontinuitatea lui $g^{(n-1)}(t)$ în punctul $t = 0$ face să intervină distribuția lui Dirac și derivatele sale.

Ca exemplu, să găsim ponderea sistemului dinamic descris de ecuația

$$y'' + y' + y = x''.$$

Sistemul descris de ecuația

$$y'' + y' + y = z$$

are ponderea

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\,t\right) \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,t & \text{pentru } t > 0 \end{cases}$$

(a se vedea Cap. III, § 2.)

Sistemul descris de ecuația

$$z = x''$$

are ponderea

$$u = \delta''.$$

Sistemul dat va avea ponderea

$$w = v * u = v'',$$

derivata fiind luată în sensul teoriei distribuțiilor.

Distribuția v' va fi dată de funcția

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ v'(t) & \text{pentru } t > 0. \end{cases}$$

Rezultă

$$w = h + \delta,$$

unde h este distribuția dată de funcția

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ v''(t) & \text{pentru } t > 0. \end{cases}$$

5. Fie $\mathcal{W}$ un sistem staționar care are ponderea (normală) w. Numim *distribuție de transfer* a sistemului $\mathcal{W}$, distribuția *)

$$q = \mathcal{F}(w).$$

Să presupunem că spațiul $\mathcal{X}$ al semnalelor de intrare conține toate funcțiile de forma:

$$x_\lambda(t) = e^{-i\lambda t}$$

considerate ca distribuții.

Dacă w este cu suport mărginit, atunci după cum am văzut în Cap. II, § 5, $\mathcal{F}(w)$ este distribuția dată de funcția:

$$q(\lambda) = \langle e^{i\lambda t}, \overline{w}(t) \rangle$$

și semnalul de ieșire y_λ corespunzător lui x_λ este

$$y_\lambda = q(\lambda)\, x_\lambda \tag{2}$$

Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ avem

$$\langle \varphi, w * x_\lambda \rangle = \langle \varphi, x_\lambda * w \rangle =$$

$$\ll \varphi(t+u), x_\lambda(u) \gg, w(t) \rangle = \left\langle \int e^{i\lambda u} \varphi(t+u)\, du,\ w(t) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \int e^{i\lambda (s-t)} \varphi(s)\, ds,\ w(t) \right\rangle = \langle e^{i\lambda t} \int e^{i\lambda s} \varphi(s)\, ds,\ w(t) \rangle =$$

*) În cazul cînd se consideră sisteme dinamice ale căror semnale sînt funcții, funcția de transfer se definește de obicei prin transformata Fourier inversă, sau, mai general, prin transformata Laplace.

$$= \langle e^{-i\lambda t}, w(t) \rangle \int e^{i\lambda s} \varphi(s)\, ds = \langle e^{-i\lambda t}, w(t) \rangle \langle \varphi(t), x_\lambda(t) \rangle =$$

$$= \langle \varphi(s), \langle \overline{e^{-i\lambda t}, w(t) \rangle x_\lambda(s)} \rangle = \langle \varphi(s), \langle e^{i\lambda t}, \overline{w}(t) \rangle x_\lambda(s) \rangle =$$

$$= \langle \varphi, q(\lambda)\, x_\lambda \rangle$$

de unde rezultă (2).

În cazul unui sistem multidimensional avem o matrice de distribuție de transfer Q, definită prin :

$$Q = \mathcal{F}(W),$$

unde W este matricea pondere.

6. În teoria dirijării automate intervin sisteme dinamice ale căror semnale sînt procese stocastice. Astfel de semnale intervin mai ales ca perturbații (zgomote), dar și semnalele utile sînt procese stocastice. Nu întotdeauna procesele stocastice care intervin sînt procese în sensul ordinar. Problemele care se pun cer considerarea proceselor stocastice generalizate.

De exemplu, așa-zisul „zgomot alb" este un proces stocastic generalizat care intervine ca perturbație în unele sisteme.

Fie $\mathcal{W}$ un sistem staționar avînd ponderea w. Vom presupune că semnalele lui $\mathcal{W}$ sînt procese stocastice generalizate în sensul definiției 1, § 2, Cap. VI. Dacă X este semnal de intrare, iar Y este semnalul corespunzător de ieșire, atunci legătura dintre semnale va fi :

$$Y = w * X,$$

unde în membrul al doilea avem convoluția dintre distribuția scalară w și distribuția vectorială X (cu valori în spațiul Hilbert H).

Fie m_X media semnalului X. Această medie este prin definiție distribuția scalară dată de egalitatea

$$\langle \varphi, m_X \rangle = E(X\, \varphi), \qquad (\varphi \in \mathcal{D}),$$

unde $E\xi$ este valoarea medie a variabilei aleatoare ξ. Media m_Y a semnalului de ieșire corespunzător lui X va fi dat în anumite condiții de existență a convoluției, de egalitate :

$$m_Y = w * m_X. \tag{3}$$

Putem stabili imediat această egalitate, în ipoteza că w este o distribuție convolubilă. Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, avem

$$< \varphi, m_Y > = E(Y\varphi) = E((w * X)\,\varphi) = E(X(s) < \varphi(t + s), w(t) >) = \ll \varphi(t + s),\ w(t) >,\ m_X(s) > = < \varphi,\ w * m_X >$$

de unde rezultă (3).

Dacă pentru un semnal X s-a dat convoluția K_X adică funcționala

$$K_X(\varphi, \psi) = E((X\,\varphi)\,(\overline{X, \psi}))$$

și dacă X este un proces staționar, atunci vom considera *covarianța* k_X a semnalului, dată de egalitatea

$$(\varphi * \overline{\hat{\psi}},\ k_X) = K_X(\varphi, \psi),$$

unde

$$\hat{\psi}(t) = \psi(-t).$$

În teoria dirijării automate, este de o mare importanță găsirea covarianței semnalului de ieșire, cînd se cunoaște covarianta semnalului de intrare.

Fie $\mathcal{W}$ un sistem staționar avînd ponderea (normală) w, fie X semnalul de intrare, Y semnalul de ieșire și să presupunem că aceste semnale sînt procese staționare generalizate. În acest caz, legătura dintre covariațele k_X, k_Y ale căror două semnale sînt date, în anumite condiții de existență a convoluției, de egalitatea

$$k_Y = \hat{w} * (w * k_X). \tag{4}$$

Presupunem, pentru simplificare, cazul proceselor generalizate reale (adică $\mathcal{D}$ și $\mathcal{H}$ sînt spații reale).

Vom stabili aici egalitatea (4) în ipoteza că distribuția w este cu suport mărginit.

Să remarcăm mai întîi că pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, notînd $\hat{\varphi}(t) = \varphi(-t)$ și

$$\varphi_1(s) = < \varphi(t + s), w(t) >, \tag{5}$$

are loc egalitatea

$$\hat{\varphi}_1(s) = <\hat{\varphi}(t+s),\ \hat{w}(t)> \tag{6}$$

care se verifică imediat.

Avem apoi pentru orice $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$:

$$<\varphi * \hat{\varphi}, k_Y> = E\{(Y\varphi)(Y\psi)\} = E\{[(w*X)\varphi][(w*Y)\psi]\} =$$
$$= E\{[X(s) <\varphi(t+s), w(t)>][Y(s) <\psi(t+s), w(t)>]\}.$$

Notînd

$$\psi_1(s) = <\psi(t+s), w(t)>$$

și folosind funcția $\varphi_1(s)$ dată de egalitatea (5) avem deci

$$<\varphi * \hat{\psi}, k_Y> = E\{(X\varphi_1)(X\psi_1)\} = <\varphi_1 * \hat{\psi}_1, k_X>. \tag{7}$$

Pe de altă parte,

$$(\varphi_1 * \hat{\psi}_1)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(s-\xi)\hat{\psi}_1(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} <\varphi(t+s-$$

$$-\xi), w(t)>\hat{\psi}_1(\xi)\,d\xi = <\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+s-\xi)\hat{\psi}_1(\xi)\,d\xi, w(t)> =$$

$$= <(\varphi * \hat{\psi}_1)(t+s), w(t)>$$

și cu (7) rezultă

$$<\varphi * \hat{\psi}, k_Y> = \ll(\varphi * \hat{\psi}_1)(t+s), w(t)>, k_X(s)> = \tag{8}$$
$$= <\varphi * \hat{\psi}_1, w * k_X>.$$

Să observăm mai departe că folosind (6) aplicată lui ψ avem

$$(\varphi * \hat{\psi}_1)(s) = (\hat{\psi}_1 * \varphi)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_1(s-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} <\hat{\psi}(t+s-\xi), \hat{w}(t)>\varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$= <\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(t+s-\xi)\varphi(\xi)d\xi, \hat{w}(t)> = <(\hat{\psi} * \varphi)(t+s), \hat{w}(t)>$$

și cu (8) rezultă

$$< \varphi * \hat{\psi}, k_Y > = \ll (\hat{\psi} * \varphi)(t+s), \hat{w}(t) >, (w * k_X)(s) > =$$

$$= < \hat{\varphi} * \varphi, \hat{w} * (w * k_X) > = < \varphi * \hat{\psi}, \hat{w} * (w * k_X) >.$$

Deoarece φ, ψ au fost arbitrare în spațiul $\mathcal{D}$, rezultă egalitatea (4).

Egalitatea (4) dă posibilitatea de a stabili legătura dintre unele caracteristici aleatoare ale semnalelor de la intrare și ieșire precum și unele proprietăți ale sistemului dinamic.

Dacă în particular semnalul X este un zgomot alb, adică un proces staționar generalizat, a cărei covarianță k_X este de forma $\mu\,\delta$, unde μ este un număr pozitiv, atunci

$$k_Y = \mu\, \hat{w} * w. \tag{9}$$

Această formulă are loc și cînd w este o funcție absolut integrabilă pe toată dreapta și atunci k_Y va fi de asemenea o funcție. În acest caz se poate calcula valoarea medie pătratică, aceasta fiind egală cu $\sqrt{k_Y(0)}$.

Să considerăm ca exemplu un filtru RC de joasă frecvență și să găsim cea mai mică constantă $T = RC$ a filtrului așa ca valoarea medie pătratică a semnalului de ieșire, cînd la intrare acționează un zgomot alb, să nu depășească un anumit număr de λ milivolți.

După cum am văzut mai înainte, funcția pondere a filtrului considerat este:

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ \dfrac{1}{T}\, e^{-\frac{t}{T}} & \text{pentru } t \geqslant 0. \end{cases} \tag{10}$$

Cu ultima formulă, convoluția semnalului de ieșire va fi

$$k(t) = \mu\, (\hat{w} * w)(t).$$

Deci

$$k(t) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(t-s)\, w(s)\, ds = \mu \int_{t}^{+\infty} w(s-t)\, w(s)\, ds.$$

Pentru $t \geqslant 0$ avem

$$k(t) = \frac{\mu}{T^2} \int_t^{+\infty} e^{-\frac{s-t}{T}} e^{-\frac{s}{T}} ds = \frac{\mu}{T^2} e^{\frac{t}{T}} \int_t^{+\infty} e^{-\frac{2s}{T}} ds = \frac{\mu}{2T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Pentru $t < 0$

$$k(t) = \frac{\mu}{2T} e^{\frac{t}{T}}.$$

Momentul de ordinul doi va fi deci

$$k(0) = \frac{\mu}{2T}.$$

Valoarea minimă a lui T se obține pentru $k(0) = \lambda^2$, deci $T = \mu/2\lambda^2$ secunde.

Să considerăm acum un sistem dinamic în care se prezintă semnale utile și perturbații, ambele fiind presupuse procese stocastice generalizate.

Semnalul util și perturbația se pot prezenta la intrări diferite.

Să considerăm cazul sistemelor staționare caracterizate de distribuții pondere.

Fie U semnalul util și Z zgomotul.

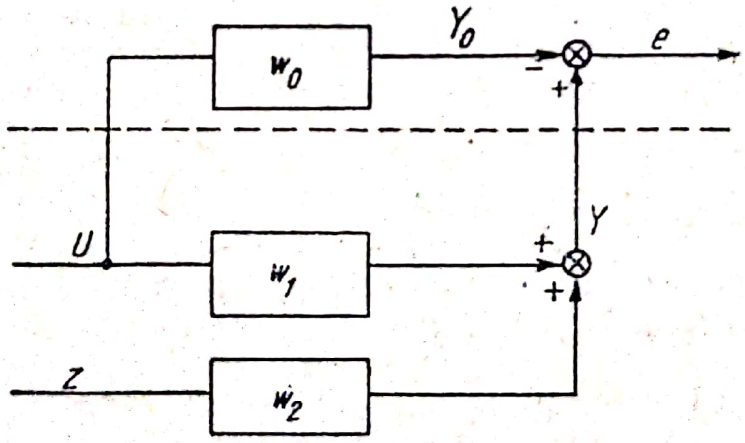


Fig. 11. — Sistemul real «cuplat» în sistemul ideal.

Fie w_1 ponderea elementului care primește semnalul util, iar w_2 ponderea elementului care primește zgomotul. În figura 11, pe lîngă sistemul real, este schițat deasupra liniei punctate și sistemul ideal, sistem care funcționează fără eroare. Sistemul

Scanned with OKEN Scanner

ideal este „cuplat" cu sistemul real, obținînd astfel ca semnal de ieșire eroarea sistemului real. Ponderea ideală w_0 este dată prin condițiile impuse sistemului. De exemplu, în cazul unui filtru avem $w_0 = \delta$; în cazul unui sistem de extrapolare avem $w_0 = \delta_\tau$; în cazul unui sistem de interpolare $w_0 = \delta_{-\tau}$.

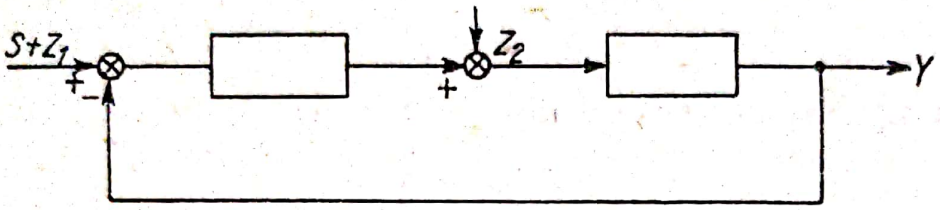


Fig. 12. — Schema unui sistem cu legătură inversă cu două intrări diferite pentru zgomotele Z_1, Z_2.

Eroarea este procesul stocastic generalizat :

$$e = (w * U) + (w_2 * Z),$$

unde $w = w_1 - w_0$.

Menționăm că și sistemele cu legătură inversă se încadrează în schema din figura 11. În particular se pot considera sisteme de tip radiolocație, care sînt sisteme cu legătură inversă avînd două intrări pentru zgomot, aflate în puncte diferite. Față de schema din figura 11, va apare în plus un element (de pondere w_3) care primește ca semnal de intrare un alt zgomot.

§ 3. Problema predicției

1. Pentru proiectarea unui sistem de predicție (extrapolare) trebuie găsită mai întîi formula de predicție sau operatorul sistemului care realizează predicția. După aceea se cere realizarea operatorului sub forma unui sistem practic.

În acest paragraf vom arăta care este formula de predicție și eroarea respectivă *).

Fie X un proces staționar generalizat în sensul dat în § 3, Cap. VI și $\mathcal{H}(X)$ spațiul hilbertian generat de X.

*) Metoda utilizată aparține lui K. Balagangadharan [3]. În redactarea acestui paragraf am primit unele sugestii din partea lui Guiașu S.

Fie s un număr real și să notăm cu $\mathcal{H}_s(X)$ subspațiul vectorial închis al lui $\mathcal{H}(X)$, generat de mulțimea variabilelor aleatoare $X(\varphi)$ corespunzătoare tuturor funcțiilor $\varphi \in \mathcal{D}$ care au suportul în semidreapta $(-\infty, s]$.

Problema predicție constă în a găsi, pentru fiecare $\varphi \in \mathcal{D}$, variabila aleatoare $T_s \varphi \in \mathcal{H}_s(X)$ pentru care are loc egalitatea

$$\|X_s^* \varphi - X\varphi\| = \inf_{f \in \mathcal{H}_s(X)} \|f - X\varphi\|. \tag{1}$$

Se mai zice că se extrapolează procesul X, sau că X_s^* este *predictorul liniar* al lui X.

Se notează

$$\varepsilon_s(\varphi) = \|X_s^* \varphi - X\varphi\|$$

și $\varepsilon_s(\varphi)$ se numește *eroare de predicție*.

Se știe că elementul $X_s\varphi$ care verifică (1) este proiecția lui $X\varphi$ pe subspațiul $\mathcal{H}_s(X)$.

Notînd cu $[H]f$ proiecția unui element f pe un subspațiu H, putem deci scrie

$$X_s \varphi = [\mathcal{H}_s(X)]\, X\varphi .$$

2. Presupunem că $E(X(\varphi)) = 0$ oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$.

Covarianța k a lui X se reprezintă sub forma

$$k(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \tag{2}$$

unde σ este o măsură pe dreaptă, cu creștere polinomială, numită *măsura spectrală* a lui X, iar $\widetilde{\varphi}$ transformata Fourier a lui φ. Procesul X se reprezintă sub forma

$$X(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\lambda)\, dZ(\lambda), \tag{3}$$

unde Z este o măsură aleatoare.

Din (2) rezultă:

$$K(\varphi, \psi) = (X\varphi \mid X\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\lambda)\, \overline{\widetilde{\psi}}(\lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

(așa cum s-a remarcat și în Cap. VI, § 3, propoziția 1).

În spațiul $\mathcal{H}(X)$ avem deci

$$\| X\varphi \| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 \, d\sigma(\lambda) \right)^{1/2},$$

de unde se vede că aplicația $X(\varphi) \to \widetilde{\varphi}$ este un izomorfism între o submulțime densă a lui $\mathcal{H}(X)$ și o submulțime densă a spațiului $L^2(R^1; \sigma)$.

Prelungind această aplicație deducem că :

Spațiul $\mathcal{H}(X)$ este izomorf cu spațiul $L^2(R^1; \sigma)$.

Pentu orice h real, vom defini pe $\mathcal{H}(X)$ un operator unitar (a se vedea de exemplu R. Cristescu [8]) T_h punînd :

$$T_h \left(\sum_{i=1}^{n} c_i X(\varphi_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i X(\tau_{-h} \varphi_i),$$

unde

$$(\tau_h \varphi)(t) = \varphi(t + h).$$

Se poate arăta că condiția de staționaritate a procesului X se poate exprima sub forma

$$T_h X(\varphi) = X(\tau_{-h} \varphi).$$

Procesul X se zice *deterministic* (sau singular) dacă

$$\bigcap_{s \in R} \mathcal{H}_s(X) = \mathcal{H}(X);$$

cu alte cuvinte dacă

$$\mathcal{H}_s(X) = \mathcal{H}(X)$$

oricare ar fi $s \in R$.

Procesul X se zice *pur nedeterministic* (sau regulat), dacă

$$\bigcap_{s \in R} \mathcal{H}_s(X) = \{0\}.$$

Orice proces staționar (generalizat) X se poate exprima în mod unic sub forma $X = Y + Z$, unde Y este un proces deterministic, Z este un proces pur nedeterministic și

$$Y(\varphi) \perp Z(\varphi)$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$.

Într-adevăr *), să punem

$$M = \bigcap_s \mathcal{H}_s(X)$$

și să notăm cu N complementul ortogonal al lui M în $\mathcal{H}(X)$. Avem

$$T_h M = M$$

și cum T_h este un operator unitar rezultă și

$$T_h N = N .$$

Dacă punem acum

$$Y(\varphi) = [M] X(\varphi); \quad Z(\varphi) = [N] X(\varphi),$$

atunci

$$X(\varphi) = Y(\varphi) + Z(\varphi)$$

și

$$Y(\varphi) \perp Z(\varphi)$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$.

Pe de altă parte,

$$Y(\tau_{-h}\varphi) + Z(\tau_{-h}\varphi) = X(\tau_{-h}\varphi) =$$

$$= T_h X(\varphi) = T_h Y(\varphi) + T_h Z(\varphi)$$

deci procesele $Y(\varphi)$ și $Z(\varphi)$ sînt staționare.

Este evident că

$$\mathcal{H}(Y) \subset M, \quad \mathcal{H}(Z) \subset N$$

de unde rezultă **)

$$\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{H}(Y) \oplus \mathcal{H}(Z) \subset M \oplus N = \mathcal{H}(X)$$

și deci

$$\mathcal{H}(Y) = M, \quad \mathcal{H}(Z) = N .$$

---

*) În cazul proceselor stocastice staționare obișnuite a se vedea [15].

**) Dacă E_1 și E_2 sînt două submulțimi ale unui spațiu Hilbert, se notează prin $E_1 \oplus E_2$ subspațiul vectorial închis generat de $E_1 \cup E_2$. Dacă E_1 și E_2 sînt subspații vectoriale închise ortogonale, atunci

$$E_1 \oplus E_2 = \{x + y\}, \; x \in E_1; \; y \in E_2.$$

Dacă suportul lui φ este conţinut în intervalul $(-\infty, s]$, atunci

$$Y(\varphi) \in M \subset \mathcal{H}_s(X),$$
$$Z(\varphi) = X(\varphi) - Y(\varphi) \in \mathcal{H}_s(X)$$

şi deci

$$\mathcal{H}_s(Y) \subset \mathcal{H}_s(X),$$
$$\mathcal{H}_s(Z) \subset \mathcal{H}_s(X).$$

Dar

$$\mathcal{H}_s(X) \subset \mathcal{H}_s(Y) \oplus \mathcal{H}_s(Z)$$

şi deci

$$\mathcal{H}_s(X) = \mathcal{H}_s(Y) \oplus \mathcal{H}_s(Z).$$

Deoarece

$$\mathcal{H}(Y) \subset M$$

înseamnă că

$$\mathcal{H}_s(Y) = M \cap \mathcal{H}_s(X) = M = \mathcal{H}(Y)$$

deci $Y(\varphi)$ este un proces deterministic.

Avem apoi

$$\bigcap_s \mathcal{H}_s(Z) = \bigcap_s (N \cap \mathcal{H}_s(X)) =$$
$$= N \cap (\bigcap_s \mathcal{H}_s(X)) = N \cap M = \{0\}$$

deci $Z(\varphi)$ este un proces pur nedeterministic.

Deoarece componenta deterministică coincide întotdeauna cu proiecţia sa pe orice $\mathcal{H}_s(X)$, în problema predicţiei vom putea presupune că X este un proces pur nedeterministic.

3. Fie X un proces pur nedeterministic. Dacă a şi b sînt două numere reale cu $a < b$, vom nota prin $\mathcal{H}_{a,b}(X)$ complementul ortogonal al lui $\mathcal{H}_a(X)$ în $\mathcal{H}_b(X)$. Evident,

$$T_h \mathcal{H}_{a,b}(X) = \mathcal{H}_{a+h,b+h}(X).$$

În ceea ce urmează vom nota prin $\mathcal{B}$ mulţimea tuturor părţilor boreliene ale dreptei reale, care au măsura Lebesgue finită. Vom defini o măsură aleatoare V pe $\mathcal{B}$, cu valori în $\mathcal{H}(X)$, în raport cu măsura Lebesgue. Deci

$$(V(B_1) \mid V(B_2)) = \mu(B_1 \cap B_2),$$

cu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Pentru aceasta vom alege un număr pozitiv u și un element $z \in H_{0,u}(X)$. Pentru fiecare interval $(a, b]$, punem

$$V((a, b]) = [\mathcal{H}_{a,b}(X)] \int_{\alpha}^{\beta} T_h z dh,$$

unde $[\alpha, \beta] \supset [a-u, b]$. Cînd $a < b < c$ avem

$$V((a, b]) + V((b, c]) = V((a, c])$$
$$V((a, b]) \perp V((b, c])$$
$$T_h V((a, b]) = V((a+h, b+h]).$$

V se poate extinde, prin procedeul obișnuit, la toate mulțimile boreliene și se poate observa că funcția λ definită pe $\mathcal{B}$ prin formula

$$\lambda(B) = \| V(B) \|^2$$

este o măsură pe $\mathcal{B}$, cu valori reale, invariantă la translație. De aici rezultă că există un număr $k \geqslant 0$ (depinzînd de z) așa ca :

$$\lambda((a, b]) = k(b-a).$$

Există cel puțin un element $z \in \mathcal{H}_{0,u}(X)$ astfel încît $k > 0$. Într-adevăr, în caz contrar pentru fiecare $z \in \mathcal{H}_{0,u}(X)$ am avea

$$\| V((a, b]) \|^2 = 0.$$

Atunci pentru orice $z \in \mathcal{H}(X)$ avem

$$E(V((a, b])\, \bar{z}) = 0. \tag{4}$$

Să luăm acum

$$z = [\mathcal{H}_{s_1, t_1}(X)]\, X(\varphi) = y(s_1, t_1),$$
$$z' = [\mathcal{H}_{s_2, t_2}(X)]\, X(\varphi) = y(s_2, t_2),$$

unde $0 \leqslant s_1 < t_1 \leqslant u$ și $0 \leqslant s_2 < t_2 \leqslant u$.

Astfel z și z' sînt proiecții ale lui X și ele satisfac relația (4) pentru (s_1, t_1), $(s_2\, t_2)$ arbitrari. Însă

$$[\mathcal{H}_{0,u}(X)]\, X(\varphi) \neq 0$$

și după cum vom vedea, aceasta conduce la o contradicție.

Avem $z \in \mathcal{H}_{0,u}(X)$ și $z' \in \mathcal{H}_{0,u}(X)$. Obținem

$$0 = E(V((0,u])\,\bar{z}') = E\left\{\left([\mathcal{H}_{0,u}(X)]\int_{-u}^{u} T_h z\,dh\right)\bar{z}'\right\} =$$

$$= E\left(\int_{-u}^{u} T_h z\,dh \cdot \bar{z}'\right) = \int_{-u}^{u} E(T_h z \cdot \bar{z}')\,dh$$

adică

$$\int_{-u}^{u} E(T_h y(s_1,t_1)\,\overline{y(s_2,t_2)})\,dh = 0. \tag{5}$$

Fie δ un număr pozitiv cu $\delta < \frac{1}{2}u$. Valoarea medie

$$E(T_h y \mid 0,u)\,\overline{y(\delta, u-\delta)})$$

este o funcție continuă de h și în $h=0$ are valoarea

$$\|y(\delta, u-\delta)\|^2.$$

Avem

$$\lim_{\delta \to 0} \|y(\delta,u-\delta)\|^2 = \|y(0,u)\|^2 = \|[\mathcal{H}_{0,u}(X)]X(\varphi)\|^2 > 0$$

și deci putem alege δ așa ca $\|y(\delta,u-\delta)\| \neq 0$ și $\gamma < \delta$ astfel ca

$$L = \int_{-\gamma}^{\gamma} E(T_h y(0,u)\,\overline{y(\delta,u-\delta)})\,dh \neq 0.$$

Dacă luăm o subdiviziune:

$$t_0 = \delta < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = u - \delta$$

a intervalului $(\delta, u-\delta)$, atunci

$$L = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\gamma}^{\gamma} E(T_h y(0,u)\,\overline{y(t_{i-1},t_i)})\,dh =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\gamma}^{\gamma} E(T_h y(t_{i-1}-\gamma, t_i+\gamma)\,\overline{y(t_{i-1},t_i)})\,dh.$$

Să comparăm aceasta cu :

$$K = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\gamma-(t_i-t_{i-1})}^{\gamma+(t_i-t_{i-1})} E\left(T_h y\left(t_{i-1}-\gamma,\, t_i+\gamma\right)\overline{y\left(t_{i-1}, t_i\right)}\right) \mathrm{d}h =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{-u}^{u} E\left(T_h y\left(t_{i-1}-\gamma,\, t_i+\gamma\right)\overline{y\left(t_{i-1}, t_i\right)}\right) \mathrm{d}h = 0$$

(a se vedea (5)). L și K sînt independente de diviziunea lui $(\delta,\ u-\delta)$.

Avem

$$|K-L| \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \| y(0, u\| \cdot \| y(t_{i-1}, t_i) \| \leqslant$$

$$\leqslant 2u \| y(0, u) \| \sup \| y(t_{i-1}, t_i) \|.$$

Dar

$$y(t_{i-1}, t_i) + [\mathcal{H}_{t_i, u}(X)]\, X(\varphi) = [\mathcal{H}_{t_{i-1}, u}(X)]\, X(\varphi)$$

și

$$y(t_{i-1}, t_i) \perp [\mathcal{H}_{t_i, u}(X)]\, X(\varphi),$$

deci

$$\| y(t_{i-1}, t_i \|^2 = \| [\mathcal{H}_{t_{i-1}, u}(X)]\, X(\varphi) \|^2 - \| [\mathcal{H}_{t_i, u}(X)]\, X(\varphi) \|^2.$$

Deoarece $\| [\mathcal{H}_{t, u}(X)]\, X(\varphi) \|^2$ este funcție continuă de t, putem face ca numărul :

$$\sup \| y(t_{i-1}, t_i) \|$$

să fie mai mic decît orice număr $\varepsilon > 0$ dat, luînd diviziunea suficient de fină. Deducem $|K - L| = 0$, adică $L = K$ deși mai sus am avut $L \neq 0$ și $K = 0$.

Această contradicție arată că există un element $z \in \mathcal{H}_{0, u}(X)$ astfel încît $k = k(z) > 0$. Se poate evident presupune $k = 1$ $\left(\text{în caz contrar luăm } \frac{1}{\sqrt{k}} z\right)$.

Vom considera măsura aleatoare V construită ca mai sus, pentru $k = 1$.

Dacă f și g sînt funcții de pătrat sumabil (în raport cu măsura Lebesgue) pe toată dreapta, atunci

$$(6) \qquad \left(\int_R f(t)\,\mathrm{d}V(t) \,\middle|\, \int_R g(t)\,\mathrm{d}V(t)\right) = \int_R f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Notînd cu $\mathscr{H}(V)$ subspațiul liniar închis în $\mathscr{H}(X)$ generat de mulțimea tuturor variabilelor aleatoare de forma $V([a,b])$, rezultă că $\mathscr{H}(V)$ este izomorf cu spațiul $L^2(R)$ al tuturor claselor de funcții de pătrat sumabil pe dreapta reală.

4. Să considerăm acum procesul generalizat staționar (neidentic nul) X_1 dat de formula:

$$X_1(\varphi) = [\mathscr{H}(V)]\,X(\varphi)\,.$$

Acest proces este pur nedeterministic, deoarece notînd

$$s(\varphi) = \sup\{t \,/\, \varphi(t) \neq 0\}$$

avem

$$X_1(\varphi) \in \mathscr{H}_{s(\varphi)}(X)$$

după cum se verifică cu ușurință.

Deoarece $X_1(\varphi) \in \mathscr{H}(V)$, există $\gamma_\varphi \in L^2(R)$ așa ca:

$$(7) \qquad X_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{s(\varphi)} \gamma_\varphi(t)\,\mathrm{d}V(t)$$

iar $\gamma_\varphi(t) = 0$ aproape peste tot pe $(s(\varphi), +\infty)$.

Funcția γ_φ se poate reprezenta sub forma:

$$(8) \qquad \gamma_\varphi = g * \varphi,$$

unde g este o distribuție.

Într-adevăr, funcția γ_φ fiind local sumabilă, poate fi considerată ca o distribuție pe $\mathscr{D}$.

Din (7) rezultă că aplicația $U(\varphi) = \gamma_\varphi$ a lui $\mathscr{D}$ în $\mathscr{D}'$ este liniară. Ea este și continuă.

Într-adevăr, există un număr α așa ca

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_{\varphi_n}(t) - \gamma_\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_{\varphi_n}(t) - \gamma_\varphi(t))\,\mathrm{d}V(t) \right\|^2 =$$

$$= \| X_1(\varphi_n) - X_1(\varphi) \|^2$$

deci dacă $\varphi_n \to \varphi$ în $\mathcal{D}$, atunci $\gamma_{\varphi_n} \to \gamma_\varphi$ în $L^2(R)$ și deci și în $\mathcal{D}'$.

Aplicația U comută cu translațiile, adică

$$U(\tau_h \varphi) = \tau_h U(\varphi).$$

Într-adevăr,

$$\int_{-\infty}^{s(\varphi)+h} \gamma_{\tau_h \varphi}(t)\, \mathrm{d}V(t) = X_1(T_h \varphi) =$$

$$= T_h X_1(\varphi) = T_h \int_{-\infty}^{s(\varphi)} \gamma_\varphi(t)\, \mathrm{d}V(t) = \int_{-\infty}^{s(\varphi)+h} \tau_h \gamma_\varphi(t)\, \mathrm{d}V(t).$$

Deoarece operatorul U este liniar, continuu și comută cu translațiile, în baza unei teoreme a lui L. Schwartz ([26], vol. II, 1951, p. 53) există o distribuție g pentru care să avem $U(\varphi) = g * \varphi$, adică (8).

Din (7) și (8) rezultă :

$$X_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (g * \varphi)(t)\, \mathrm{d}V(t). \tag{9}$$

Observații. 1) *Distribuția g din (9) aparține lui $\mathcal{S}'$, iar transformata sa Fourier $\mathcal{F}(g)$ este produsul dintre un polinom și o funcție de pătrat sumabil.*

Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ funcția $\gamma_\varphi = g * \varphi$ este indefinit derivabilă și $\gamma_\varphi^{(k)} \in L^2(R)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Deoarece $g * \varphi \in \mathcal{D}_{L^2}$ oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$, rezultă (vezi L. Schwartz, *loc. cit.*, p. 56) $g \in (\mathcal{D}_L)$. Din $\mathcal{F}(g) \cdot \mathcal{F}(\varphi) \in L^2(R)$ oricare ar fi φ rezultă că $\mathcal{F}(g) \in L^2(R)$ și cum $g \in \mathcal{D}'_{L^2}$, $\mathcal{F}(g)$ este produsul dintre un polinom și o funcție de pătrat sumabil.

2) X_1 *are o măsură spectrală absolut continuă față de măsura Lebesgue.*

Într-adevăr, dacă $\mathcal{F}_1$ este măsura spectrală a lui X_1, se poate verifica egalitatea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\varphi * \tilde{\psi})(\lambda)\, \mathrm{d}\sigma_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\varphi * \psi)(\lambda)\, |\mathcal{F}g(\lambda)|^2\, \mathrm{d}\lambda$$

și este suficient de ținut seama că în spațiul $\mathcal{S}$, mulțimea elementelor de forma $\varphi * \tilde{\psi}$ este densă peste tot.

5. Vom arăta acum că *măsura spectrală* σ *a lui* X *este absolut continuă* față de măsura Lebesgue.

Pentru aceasta să considerăm descompunerea $\sigma = \sigma_c + \sigma_s$, unde σ_c este partea absolut continuă iar σ_s este partea singulară ale lui σ.

Fie Z_c și Z_s măsurile aleatoare corespunzătoare și să punem

$$X_s(\varphi) = \int (\mathcal{F}\varphi)(\lambda)\, dZ_s(\lambda), \quad X_c(\varphi) = \int (\mathcal{F}\varphi)(\lambda)\, dZ_c(\lambda).$$

Atunci X_c și X_s sînt procese (generalizate) staționare ortogonale pur nedeterministice și:

$$X(\varphi) = X_c(\varphi) + X_s(\varphi).$$

Fie acum V_s măsura aleatoare construită pentru X_s ca în secțiunea 3 și fie:

$$X_s(\varphi) = X_s^{(1)}(\varphi) + X_s^{(2)}(\varphi)$$

unde

$$X_s^{(1)}(\varphi) = [\mathcal{H}(V_s)]\, X_s(\varphi).$$

Dacă $X_s(\varphi) \not\equiv 0$, atunci $X_s^{(1)}(\varphi) \not\equiv 0$ și $X_s^{(1)}(\varphi)$ se reprezintă sub forma:

$$X_s^{(1)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (g_s * \varphi)(t)\, dV_s(t).$$

Cu observația (2) din secțiunea precedentă măsura specială a lui $X_s^{(1)}$ este absolut continuă față de măsura Lebesgue. Deoarece $X_s^{(1)}$ și $X_s^{(2)}$ sînt ortogonale, măsurile spectrale respective $\sigma_s^{(1)}$, $\sigma_s^{(2)}$ verifică egalitatea:

$$\sigma_s = \sigma_s^{(1)} + \sigma_s^{(2)}.$$

Dar atunci măsura singulară σ_s ar avea o componență absolut continuă nenulă, ceea ce este contradictoriu. Deci $X_1(\varphi) \equiv 0$ astfel că σ este absolut continuă.

Se poate de asemenea arăta că orice proces generalizat staționar care are o măsură spectrală absolut continuă, se poate reprezenta sub forma:

$$X(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (h * \varphi)(t)\, dV(t),$$

unde h este o distribuție temperată (a se vedea Doob J. L. [9], p. 532; metoda se poate adapta la cazul proceselor generalizate).

6. În această secțiune vom demonstra că *procesul (generalizat) staționar pur nedeterministic X se reprezintă sub forma*:

$$X(\varphi) = \int_{-\infty}^{s(\varphi)} (g * \varphi)(t)\, \mathrm{d}V(t) \tag{10}$$

unde g este o distribuție temperată cu suportul în $(-\infty, 0]$.

Măsura V este o măsură aleatoare ca în secțiunea 3.

Pentru aceasta vom demonstra că $X_1 = X$ și atunci vom ține seamă că are loc (9).

Avem

$$X(\varphi) = X_1(\varphi) + X_2(\varphi),$$

unde

$$X_1(\varphi) = [\mathcal{H}(V)]\, X(\varphi),$$

iar $X_2(\varphi) \perp \mathcal{H}(V)$, oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$.

Procesul X_2 este staționar și pur nedeterministic după cum se poate verifica.

Dacă $X_2(\varphi) \not\equiv 0$, atunci vom construi o măsură aleatoare V_2 ca în secțiunea 3 și vom considera descompunerea

$$X_2(\varphi) = X_{21}(\varphi) + X_{22}(\varphi),$$

unde

$$X_{21}(\varphi) = [\mathcal{H}(V_2)]\, X_2(\varphi)$$

iar $X_{22}(\varphi) \perp \mathcal{H}(V_2)$. Notăm că $X_{21}(\varphi) \not\equiv 0$.

Avem $\mathcal{H}(V_2) \perp \mathcal{H}(V)$ deoarece $X_{21}(\varphi) \perp \mathcal{H}(V)$ iar $\mathcal{H}(V_2) \subset \mathcal{H}(X_2)$.

Pentru orice t are loc relația

$$\mathcal{H}(V((a, b]),\ a < b \leqslant s) \subset \mathcal{H}_s(X).$$

Procesele X_1, X_{21} se reprezintă sub formele:

$$X_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{s(\varphi)} \gamma_\varphi(t)\, \mathrm{d}V(t),$$

$$X_{21}(\varphi) = \int_{-\infty}^{s(\varphi)} \gamma_\varphi^*(t)\, \mathrm{d}V(t),$$

unde $\gamma_\varphi, \gamma_\varphi^* \in L^2(R)$.

Fie $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ așa ca $X_1(\varphi_0) \neq 0$ și să considerăm un număr $\alpha < 0$. Să punem

$$\xi = \int_\alpha^{s(\varphi_0)} \overline{\gamma_{\varphi_0}(\alpha - t)}\, dV(t) - \int_\alpha^{s(\varphi_0)} \overline{\gamma^*_{\varphi_0}(\alpha - t)}\, dV(t).$$

Avem, ținînd seama că $s(\varphi_0) = 0$,

$$\| \xi \|^2 = \int_\alpha^0 |\gamma_{\varphi_0}(\alpha - t)|^2\, dt + \int_\alpha^0 |\gamma^*_{\varphi_0}(\alpha - t)|^2\, dt$$

și cum

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^0 |\gamma^*_{\varphi_0}(\alpha - t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^0 |\gamma^*_{\varphi_0}(t)|^2\, dt = \| X(\varphi_0) \|^2$$

există $\alpha < 0$ așa ca

$$\int_\alpha^0 |\gamma^*_{\varphi_0}(\alpha - t)|^2\, dt > 0.$$

Deci ξ este un element nenul al spațiului $\mathcal{H}(V)$.

Să arătăm că $\xi \perp \mathcal{H}(X)$.

Pentru aceasta să observăm în primul rînd că din egalitatea

$$X(\varphi_0) = \int_{-\infty}^0 \gamma^*_{\varphi_0}(t)\, dV(t) + \int_{-\infty}^0 \gamma_{\varphi_0}(t)\, dV_2(t) + X_{22}(\varphi_0)$$

și din (6) rezultă $(\xi \mid X(\varphi_0)) = 0$.

Pe de altă parte, pentru orice s

$$X(\tau_s \varphi_0) = \int_{-\infty}^{-s} \tau_s \gamma^*_{\varphi_0}(t)\, dV(t) + \int_{-\infty}^{-s} \tau_s \gamma_{\varphi_0}(t)\, dV_2(t) + X_{22}(\tau_s \varphi_0)$$

de unde rezultă $(\xi \mid X(\tau_s \varphi_0)) = 0$.

Deci elementul ξ este ortogonal subspațiului generat de translațiile lui $X(\varphi_0)$, deci $\xi \perp \mathcal{H}(X)$, ceea ce este contradictoriu.

Rezultă că $X_2(\varphi) \equiv 0$, adică $X_1 = X$.

7. Cu (10) rezultă acum imediat că pentru t real

$$\mathcal{H}_t(X) = \mathcal{H}(V((a,b]), a < b \leqslant t).$$

Soluția problemei predicației pentru $t = 0$ este astfel dată de formula

$$X^*(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} (\gamma * \varphi)(t)\, \mathrm{d}V(t)$$

iar eroarea

$$\varepsilon_s^2(\varphi) = \int_0^{t(\varphi)} |(\gamma * \varphi)(t)|^2\, \mathrm{d}t.$$

Se poate demonstra că pentru ca un proces stocastic generalizat X să fie pur nedeterministic este necesar și suficient să aibe o măsură spectrală absolut continuă, a cărei densitate v satisface condiția:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lg v(t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t > -\infty.$$

Un proces este singular, dacă și numai dacă măsura sa spectrală v satisface condiția:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lg v(t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = -\infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

Quelques applications de la théorie des distributions

Résumé

Ce livre s'occupe de quelques applications de la théorie des distributions, qui sont nécessaires aux physiciens et aux techniciens.

Dans le premier chapitre on introduit quelques notions d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans la définition des distributions.

On définit, en général, les distributions à valeurs dans un espace vectoriel muni d'une relation de convergence et on considère en spécial les distributions numériques ou à valeurs dans un espace de Banach ou de Hilbert.

On y introduit aussi quelques considérations plus spéciales, concernant les espaces des fonctions de carré sommable et l'intégrale par rapport à une mesure à valeurs dans un espace de Hilbert. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre on étend aux espaces hilbertiens de distributions la notion de noyau reproduisant de N. Aronszajn.

Le deuxième chapitre est consacré aux opérations avec les distributions : multiplication par des fonctions, dérivation, intégration, convolution, composition avec des familles composables de distributions et transformation de Fourrier.

Dans le premier paragraphe du troisième chapitre, on étudie dans le cadre de la théorie des distributions, les équations différentielles linéaires de la forme (en notation vectorielle)

$$T' = AT + S \tag{1}$$

où A este une matrice de fonctions au moins continues et S un vecteur-distribution dont l'ordre est lié à l'ordre de dérivabilité de la matrice A (en particulier si A est indéfiniment dérivable, S peut être une distribution quelconque).

Scanned with OKEN Scanner

On y applique la méthode de la variation des constantes et les familles composables de distributions. En particulier on étudie l'équation

$$X' = A(t)\,X + \sum_k \Lambda_k\,\delta(t - t_k) \tag{2}$$

dont on trouve les solutions distributions périodiques.

Le deuxième paragraphe s'occupe de l'équation (1) dans le cas particulier où A est constant. Au troisième paragraphe on résoud une équation intégrale de convolution dans l'espace des distributions limités à gauche. Dans le quatrième chapitre, on donne quelques exemples simples de problèmes de physique, où l'on doit travailler avec des distributions. Mentionnons les équations des circuits électriques et la diffraction à l'infini.

Dans le cinquième chapitre on applique les distributions à la formulation et la résolution des problèmes classiques de la physique mathématique. Le premier paragraphe utilise les solutions fondamentales pour trouver les potentiels dans les problèmes de Dirichlet et de Neumann et pour résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur. Dans le deuxième paragraphe on applique la transformation de Fourier partielle aux problèmes hyperboliques et dans le dernier paragraphe on fait intervenir les séries trigonométriques.

Le sixième chapitre donne quelques applications à la théorie des probabilités.

On interprète d'abord les fonctions de répartition et les fonctions caractéristiques dans la théorie des distributions. Ensuite on définit les processus stochastiques généralisés comme distributions à valeurs dans l'espace des variables aléatoires de dispersion finie et on représente ces processus par l'intermédiaire de la distribution corrélative.

Enfin, le septième chapitre décrit, en termes des distributions les systèmes physiques linéaires et donne une théorie de la prédiction pour les processus stochastiques généralisés.

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

1. ARONSZAJN N., *Theory of reproducing kernels*. Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 337—404 (1950).
2. ARSAC J., *Transformation de Fourier et théorie des distributions*. Dunod, Paris, 1961.
3. BALAGANGADHARAN K., *The prediction theory of stationary random distributions*. Memoirs of the College of Science University of Kyoto. Series A, XXXIII, Mathematics 2 243—256 (1960).
4. CRAMER H., *Stochastic processes as curves in Hilbert space*. Teoria veroiatnostei, **9**, 193—204 (1964).
5. CRISTESCU ROMULUS, *Procese stocastice generalizate în sistemele dinamice*. Probleme de automatizare, **V**, 63—70 (1962).
6. — *Utilizarea funcțiilor generalizate în studiul sistemelor automate cu semnale aleatoare*. Automatica și electronica, **6**, 1—3 (1962).
7. — *Familles composables de distributions et systèmes physiques linéaires*. Revue Roum. Math. pures et appl., **9**, 703—711 (1964).
8. — *Analiză funcțională*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1965.
9. DOOB J. L., *Stochastic Processes*, New York, 1953.
10. GHELFAND I. M., ȘILOV G. E., *Oboeșcionie funcții i deistvia nad nimi*, Moskva, 1959.
11. — *Prostranstvu osnovnîh i oboșcionîh funcții*. Moskva 1958.
12. — *Nekotorîe vaprosi teorii diferențialnîh uravnenii*. Moskva 1958.
13. GHELFAND I. M., VILENKIN N. IA., *Nekotorie primenenia garmoniceskovo analiza*. Osnașceonie ghilbertovi prostranstva. Moskva (1961).
14. GOHMAN E. H., *Integral Stiltjesa i evo primenenia*. Moskva, 1958.
15. HANNER O., *Deterministic and non deterministic random processes*. Arkiv. för Mat., **II**, 14 (1949), 161—177.
16. HÖRMANDER L., *Linear partial differential operators*. Berlin, 1963.
17. LANING J. H., BATTIN R. H., *Random processes in automatic control*. New York 1956.
18. MARINESCU G., *Spații vectoriale normate*. Ed. Academiei R.P.R., București, 1963.

Scanned with OKEN Scanner

19. MARINESCU G., *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions*. Berlin, 1963.
20. — *Distributions reproduisantes et représentations des processus stochastiques généralisés*. Revue Roum. Math. pures et appliq. **9**, 577—581 (1964).
21. MESCHOWSKI, HERBERT, *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion*. Springer-Verlag, 1962.
22. ONICESCU, O., *Teoria probabilităților și aplicații*. București, 1963.
23. PARZEN, EMANUEL, *Regression analysis of continuous parameter time series*. Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability — University of California Press. Berkeley and Los Angeles, 1961, 469—489.
24. PUGACIOV V. S., *Teoria slucianih funcții i eio primenenia k zadaciam avtomaticeskovo upravlenia*. Moskva, 1960.
25. ROZANOV I. A., *K ecstrapoliații oboșonih sluciainih proțesov*. Teoriia veroiatnostei i io primenenie, **IV**, 465—471 (1959).
26. SCHWARTZ L., *Théorie des distributions*, 2 vol. Paris, 1950—1951.
27. — *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Paris 1961.
28. — *Application of distributions to the study of elementary particles in relativistic quantum mechanics*. Department of Mathematics, University of California. March, 1961.
29. SNEDDON I. *Fourier transforms*. New York, 1951.
30. SABAC M., *Familii compozabile de distribuții și transformata Fourier*. St. și cerc. mat. (1965).
31. TUDOR C., *Probleme la limită bilocale pentru ecuații diferențiale liniare*. *St. cerc. mat.*, **17**, 793—801 (1965).
32. WEXLER D., *Solutions périodiques et presque-périodiques des systèmes d'équations différentielles linéaires en distributions*. Journal of Differential Equations, **2**, (1966).
33. — *Soluții periodice și aproape periodice ale sistemelor de ecuații diferențiale cu impulsuri* (Disertație), București (1965).

Scanned with OKEN Scanner

Tabla de materii

Pag.

Prefață 5

Capitolul I

Spații vectoriale și noțiunea de distribuție 7

§ 1. Spații vectoriale cu convergență 7
§ 2. Spații Banach și spații Hilbert 12
§ 3. Spații hilbertiene de funcții. Integrale hilbertiene 22
§ 4. Distribuții vectoriale și distribuții numerice 26
§ 5. Distribuții reproduizante 35

Capitolul II

Operații cu distribuțiile 43

§ 1. Produsul unei distribuții printr-o funcție 43
§ 2. Derivarea și integrarea distribuțiilor 48
§ 3. Convoluția distribuțiilor 62
§ 4. Familii compozabile de distribuții 69
§ 5. Transformarea Fourier 75

Capitolul III

Ecuații diferențiale și ecuații integrale 89

§ 1. Ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili 89
§ 2. Ecuația cu coeficienți constanți 103
§ 3. Ecuații de convoluție 110

Capitolul IV

Unele aplicații în fizică 113

§ 1. Mărimi fizice exprimate prin distribuții 113
§ 2. Aplicații la circuite electrice. 116
§ 3. Exemple de aplicații în optică 121

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

Capitolul V

Ecuaţii cu derivate parţiale 125

§ 1. Soluţii fundamentale pentru ecuaţiile liniare cu coeficienţi constanţi 125
§ 2. Aplicarea transformării Fourier parţiale 138
§ 3. Utilizarea seriilor trigonometrice 142

Capitolul VI

Aplicaţii în calculul probabilităţilor 146

§ 1. Variabile aleatoare, funcţii de repartiţie, densităţi, funcţii caracteristice 146
§ 2. Procese stocastice generalizate 153
§ 3. Procesele staţionare 157

Capitolul VII

Aplicaţii la sisteme dinamice liniare 159

§ 1. Sisteme dinamice liniare 159
§ 2. Sisteme staţionare. Sisteme cu semnale aleatoare 167
§ 3. Problema predicţiei 178

Quelques applications de la théorie des distributions (Résumé) 193
Bibliografie 195

Scanned with OKEN Scanner

Redactor responsabil: MOCANU PETRU
Tehnoredactor: BÂRZEANU SONIA

Dat la cules 22.12.1965. Bun de tipar 18.03.1966. Apărut 1966. Tiraj 1900. Hîrtie semivelină de 63 g/m². Coli editoriale 9,61. Coli de tipar 12,5. A 18100/1966 C.Z. pentru bibliotecile mari 519.251 (51+53). C.Z. pentru bibliotecile mici 519.

Întreprinderea Poligrafică „Informația" str. Brezoianu nr. 23–25 București, Republica Socialistă România, comanda nr. 5197.

64

Scanned with OKEN Scanner